27/06/13

MQ44 - Examen final

Corrigé

1.1. Effort normal = poids de la partie du poteau en aval de la section en x

$$\boxed{N(x) = -\pi R^2 \rho g (H-x)}$$

1.2. En $x=0$ $N(0) = \pi R^2 \rho g H$

$$\sigma = \frac{N(0)}{\text{Section}} \qquad \boxed{\sigma = -\rho g H}$$

1.3. $$\boxed{(\sigma) = \begin{pmatrix} -\rho g H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

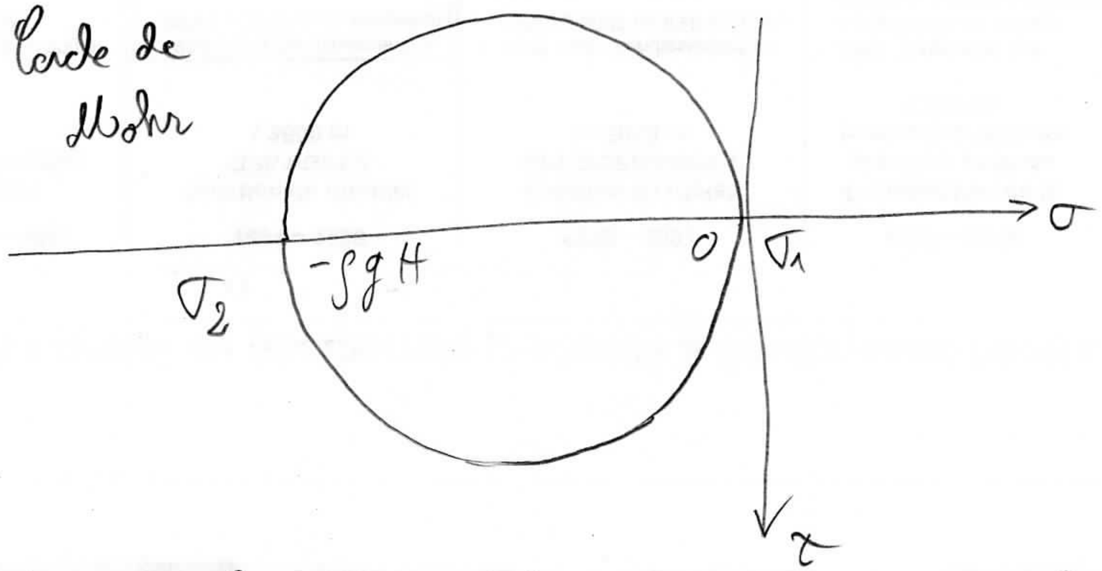
1.4. $$\boxed{(\sigma)' = \begin{pmatrix} -\rho g H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

C'est une matrice diagonale

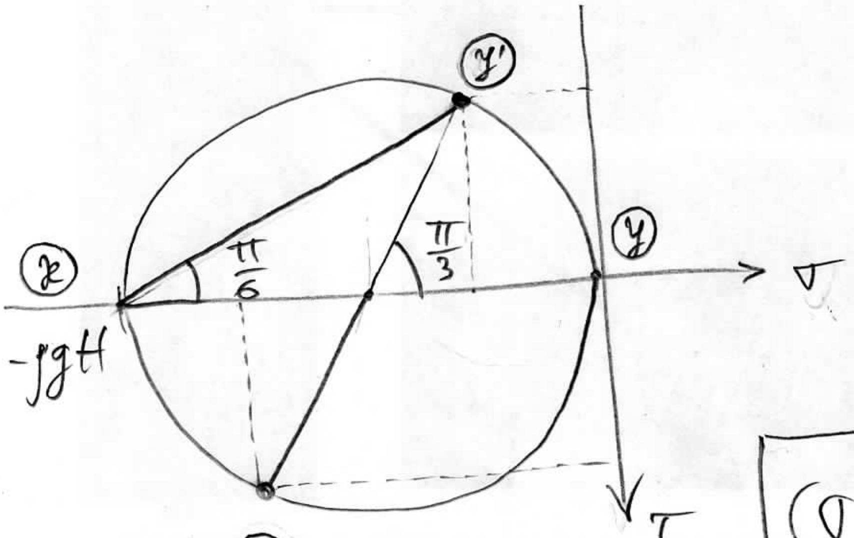
1.5. Les coefficients de la diagonale sont les contraintes principales.

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 & \text{(La plus grande)} \\ \sigma_2 = -\rho g H \end{cases}$$

Cercle de Mohr



1.6. Méthode 1 : utilisation du cercle de Mohr



Point x' $\begin{cases} \sigma = -\frac{3}{4}\rho g H \\ \tau = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho g H \end{cases}$

Point y' $\begin{cases} \sigma = -\frac{1}{4}\rho g H \\ \tau = -\frac{\sqrt{3}}{4}\rho g H \end{cases}$

$$\boxed{(\sigma') = \frac{\rho g H}{4}\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

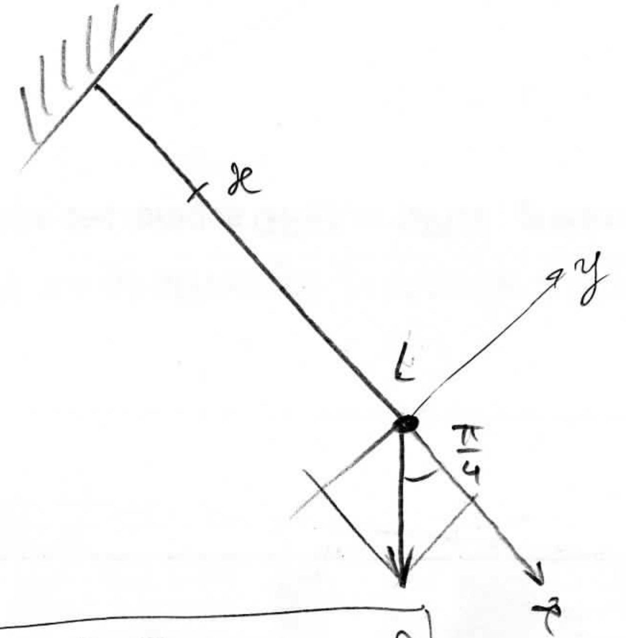
Méthode 2 : formule de changement de base.

Matrice de passage : $(P) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$

$(\sigma') = {}^T(P)(\sigma)(P)$

$(\sigma') = \frac{1}{4}\rho g H \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2.1



$$\boxed{\vec{R} = \begin{pmatrix} Mg\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -Mg\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2.2

$$\boxed{\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg\frac{\sqrt{2}}{2}(L-x) \end{pmatrix}}$$

2.3 Surface de la section : a^2

Effort normal : $Mg\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{\sigma = \frac{Mg\sqrt{2}}{2a^2}}$$

2.4 $$I_z = \iint_{section} y^2 \, ds$$

$$\boxed{I_z = \frac{a^4}{12}}$$

2.5 $$\sigma = -\frac{M_z(x)}{I_z} y$$

$$\sigma = \frac{Mg\sqrt{2}}{2 I_z} y (L - x) \qquad \boxed{\sigma = \frac{6 Mg\sqrt{2}}{a^4} y (L - x)}$$

2.6 Contrainte normale = contrainte normale due à l'effort normal + contrainte normale due au moment fléchissant.

$$\sigma = \frac{Mg\sqrt{2}}{2a^2} + \frac{6 Mg\sqrt{2}}{a^4} y (L - x)$$

Valeur maximale pour $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a}{2} \end{cases}$

$$\sigma_{max} = \frac{Mg\sqrt{2}}{2a^2} + \frac{3 Mg\sqrt{2} L}{a^3}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{Mg\sqrt{2}}{2a^2} \left(1 + 6\frac{L}{a}\right)}$$

2.7 $$\sigma_{max} = \frac{1 \times 9{,}81\sqrt{2}}{2 \times 7^2}\left(1 + 6\,\frac{1000}{7}\right)$$

$$\boxed{\sigma_{max} = 121 \text{ MPa}}$$

2.8 $$\boxed{R_{e\,mini} = 242 \text{ MPa}}$$

2.9 $$\frac{d^2V_y}{dx^2} = \frac{M_3(x)}{EI_3}$$

$$\boxed{\frac{d^2V_y}{dx^2} = -\frac{Mg\sqrt{2}}{2EI_3}(L - x)}$$

2.10 $$\frac{dV_y}{dx} = -\frac{Mg\sqrt{2}}{2EI_3}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

en tenant compte de $\frac{dV_y}{dx}(0) = 0$

$$V_y(x) = -\frac{Mg\sqrt{2}}{2EI_3}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

en tenant compte de $V_y(0) = 0$

$$V_y(L) = -\frac{Mg\sqrt{2}}{2E}\,\frac{12}{a^4}\,\frac{L^3}{3}$$

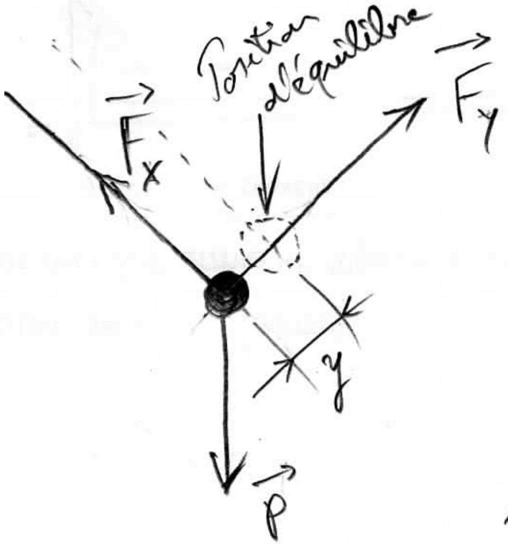
$$\boxed{V_y(L) = -\frac{2MgL^3\sqrt{2}}{a^4 E}}$$

2.11 Effort appliqué : $-Mg\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$K = \frac{-Mg\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2MgL^3\sqrt{2}}{a^4E}}$$

$$\boxed{K = \frac{a^4E}{4L^3}}$$

2.12



$\vec{F_x}$: Effort exercé par la poutre dans la direction x, qui équilibre la projection du poids $\vec{P}$ de la masse dans cette direction.

$\vec{F_y}$: Effort exercé par la poutre dans la direction y

* équilibre le poids à la position d'équilibre.
* $F_y = -Ky$ pour une autre position de la masse.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse :

$$-Ky = My'' \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\boxed{My'' + Ky = 0}$$

2.13 Solution de l'équation différentielle

$$\boxed{y = A\cos(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

et en tenant compte de $y(0) = A$ et $y'(0) = 0$

$$N = \frac{\omega}{2\pi} \qquad N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^4 E}{4L^3 M}}$$

$$\boxed{N = \frac{a^2}{4\pi L}\sqrt{\frac{E}{LM}}}$$

2.14 $E = 100 \cdot 10^9$ Pa $\qquad L = 1$ m

$a = 0{,}007$ m $\qquad M = 1$ kg

$$\boxed{N = 1{,}23 \text{ Hz}}$$