MQ44 - Printemps 2013
Sujet de l'Examen FINAL
27/06/2013

Durée : 2 h - Documents autorisés
2 exercices indépendants

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Contraintes au pied d'un poteau vertical

Soit un poteau vertical encastré, considéré comme une poutre droite, voir Fig. 1.
Il possède une hauteur H et une masse volumique uniforme ρ.
Sa section est circulaire de rayon R.
Il est soumis à la pesanteur terreste g.

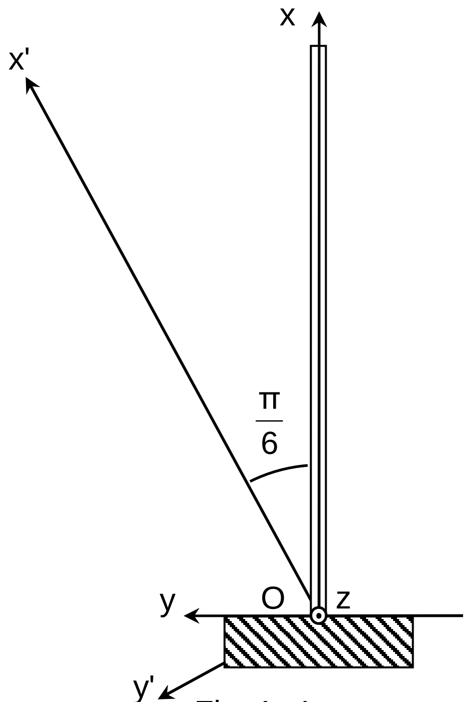

Fig. 1 : Le poteau vertical et les 2 repères.

1.1. Quelle est l'expression de l'effort normal le long du poteau ?

1.2. Quelle est la contrainte normale σ au point O, centre de la section x = 0 ? Donner son expression en fonction de ρ, g et H.

1.3. Ecrire la matrice des contraintes tridimensionnelles en ce point.

1.4. Constater qu'il s'agit d'un état de contraintes planes et écrire la matrice bidimensionnelle des contraintes dans le repère (x, y).

1.5. Sans aucun calcul, identifier les contraintes principales et tracer le cercle de Mohr en ce point.

1.6. Ecrire la matrice bidimensionnelle des contraintes dans le plan repère (x', y') défini sur la Fig. 1.

2. Masse pendue à une poutre droite inclinée

Une poutre droite est encastrée à l'une de ses extrémités et supporte une masse ponctuelle M à l'autre.
Son axe est incliné par rapport à la verticale, conformément à la Fig. 2.
Soit L la longueur de la poutre et a le côté de sa section, qui est carrée.
Le poids de la poutre est négligeable par rapport à celui de la masse M, qui est soumise à la pesanteur terreste g.

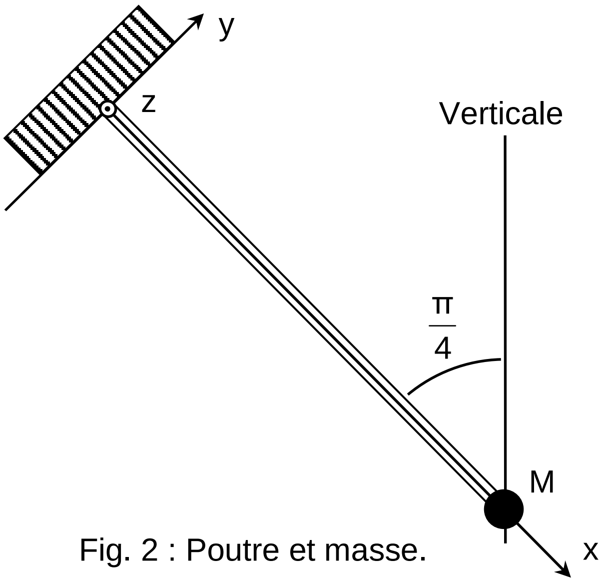

Fig. 2 : Poutre et masse.

2.1. Quelle est la résultante du torseur de cohésion en une section de la poutre d'abscisse x ?

2.2. Quel est le moment résultant du torseur de cohésion en une section de la poutre d'abscisse x ?

2.3. Quelle est la contrainte due à l'effort normal en un point quelconque de la poutre ?

2.4. A partir de la formule qui définit le moment quadratique I_z de la section, déterminer son expression en fonction de a.

2.5. Quelle est la contrainte due au moment fléchissant en un point quelconque de la poutre ?

2.6. En quel point précis de la poutre la contrainte normale est-elle maximale et quelle est l'expression de cette valeur maximale, en fonction de M, g, L et a ?

2.7. Calculer numériquement cette valeur maximale avec les données suivantes :
$M = 1$ kg $g = 9{,}81$ m/s^2 $L = 1$ m $a = 7$ mm

2.8. Quelle doit être la limite d'élasticité minimale du matériau de la poutre pour que cette contrainte maximale n'en dépasse pas la moitié ?

2.9. Rappeler l'équation différentielle à laquelle obéit le déplacement latéral $V_y(x)$ d'une section de la poutre et l'écrire en faisant apparaître la variable x et E, le module d'Young du matériau de la poutre.

2.10. Intégrer cette équation différentielle pour déterminer le déplacement latéral de la masse M, noté $V_y(L)$.

2.11. Soit K la rigidité en flexion de la poutre : $K = \dfrac{\text{Effort appliqué dans la direction y}}{V_y(L)}$

Exprimer K en fonction de L, a et E.

2.12. La masse M est écartée de sa position d'équilibre, d'une distance A dans la direction y, puis abandonnée sans vitesse initiale, à l'instant t = 0.
Faire le bilan des efforts qui s'exercent sur M à un instant ultérieur quelconque et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit son mouvement.

2.13. Montrer qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner sa fréquence.

2.14. Calculer numériquement cette fréquence avec les données de la question 2.7 et pour un module d'Young E de 100 GPa.