

# MQ 44 - P 2014

## Examen final - Corrigé

1.1

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

{ N : effort normal  
S : section de la poutre

$$\sigma = \frac{F}{e \cdot l_r}$$

1.2

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{F}{e \cdot l_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{F}{e \cdot l_r \cdot E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu F}{e \cdot l_r \cdot E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu F}{e \cdot l_r \cdot E} \end{pmatrix}$$

1.4

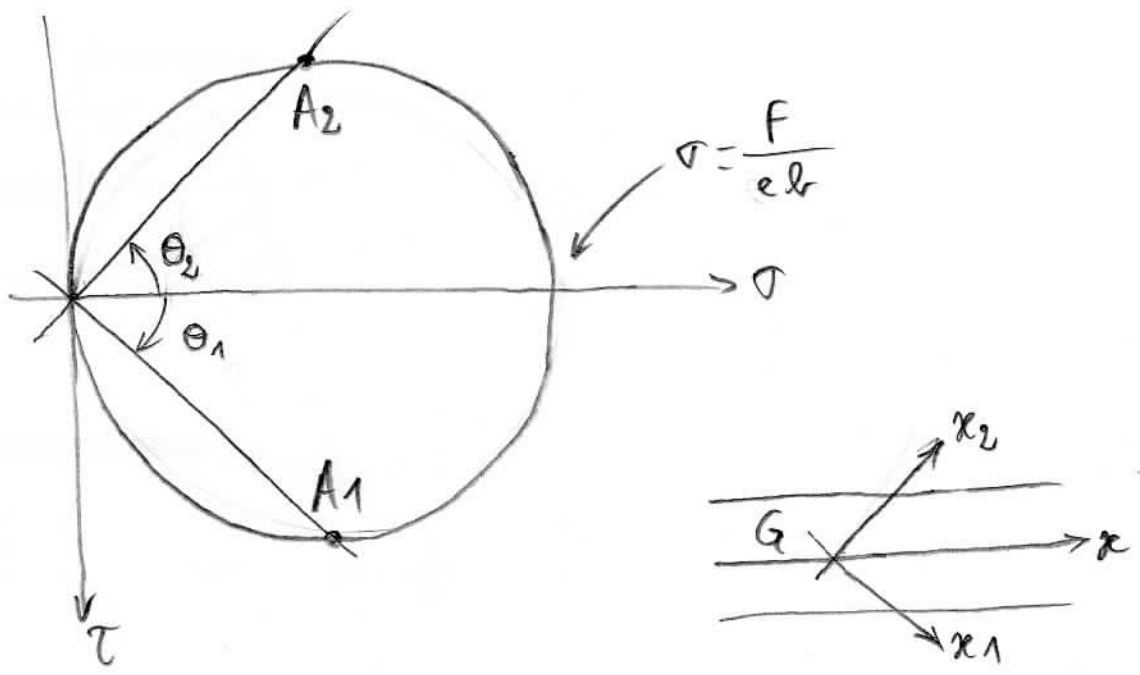
$$\frac{\Delta l_r}{l_r} = -\frac{\nu F}{e \cdot l_r \cdot E}$$

$$\frac{\Delta e}{e} = -\frac{\nu F}{e \cdot l_r \cdot E}$$

1.5

Contraintes planes dans le plan  $(G_x, G_y)$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{F}{2eb} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1.6

\*  $\tau$  maximum : point  $A_1$  du cercle de Mohr.

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

\*  $\tau$  minimum : point  $A_2$  du cercle de Mohr.

$$\theta_2 = +\frac{\pi}{4}$$

1.7

Point  $A_1$   $\begin{cases} \sigma = \frac{F}{2eb} \\ \tau = \frac{F}{2eb} \end{cases}$

Point  $A_2$   $\begin{cases} \sigma = \frac{F}{2eb} \\ \tau = -\frac{F}{2eb} \end{cases}$

$$(\sigma') = \frac{F}{2eb} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8 Diagonalisation de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda$  : valeur propre

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda-2) = 0$$

Donc  $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Matrice des contraintes principales dans le plan  $(G_x, G_y)$ :

$$\frac{F}{eL} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cohérent avec la réponse à la question 1.2.

1.9

$$\sigma = \frac{23000}{4 \times 25}$$

$$\sigma = 230 \text{ MPa}$$

$$\Delta L = -\frac{0,3 \times 23000}{200000 \times 4}$$

$$\Delta L = -8,6 \mu\text{m}$$

$$\Delta e = -\frac{0,3 \times 23000}{200000 \times 25}$$

$$\Delta e = -1,4 \mu\text{m}$$

1.10

La limite d'élasticité sera forcément dépassée au niveau de l'épaulement, à cause du phénomène de concentration de contraintes.

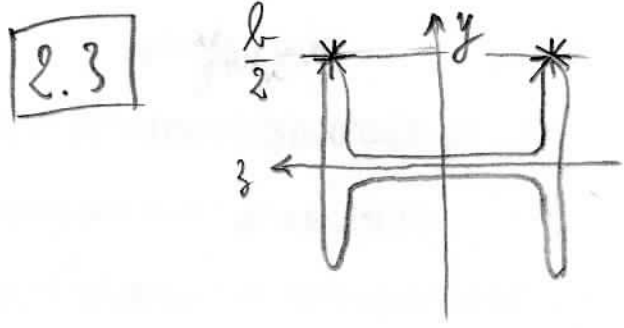
2.1 Effort en M  $\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$

$M_3 = -Mg(L-x)$

2.2  $|M_3(x)| = Mg(L-x)$

$|M_3(x)| = |M_3|_{max}$  pour  $x=0$

$|M_3|_{max} = MgL$



Dans la section  $x=0$

$\sigma = -\frac{M_3}{I_3} y$

$I_3$ : moment quadratique de la section

$\sigma = \frac{MgL}{I_3} y$

$\sigma$  est maximale pour  $y = \frac{b}{2}$ , points \* sur le croquis.

$\sigma_{max} = \frac{MgL \frac{b}{2}}{I_3}$

2.4 Equation différentielle:  $\frac{d^2 V_y}{dx^2} = \frac{M_3}{EI_3}$

$\frac{d^2 V_y}{dx^2} = -\frac{Mg}{EI_3} (L-x)$

1<sup>ère</sup> intégration :  $\frac{dV_y}{dx} = -\frac{Mg}{EI_z} (Lx - \frac{x^2}{2}) + k_1$

Encastrement  $\rightarrow \frac{dV_y}{dx}(0) = 0 \rightarrow k_1 = 0$

2<sup>ème</sup> intégration :  $V_y = -\frac{Mg}{EI_z} (L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + k_2$

Encastrement  $\rightarrow V_y(0) = 0 \rightarrow k_2 = 0$

$$V_y(x) = -\frac{Mg}{EI_z} (L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

$$V_y(L) = -\frac{MgL^3}{3EI_z}$$

2.5  $K = \frac{\text{Effort appliqué}}{\text{Déplacement obtenu}}$

$$K = \frac{-Mg}{V_y(L)}$$

$$K = \frac{3EI_z}{L^3}$$

2.6 Effort agissant sur la masse dans le sens vertical :

\* son poids :  $-Mg$

\* l'effort de rappel exercé par la poutre :  $-Ky_M$

2.7  $\Sigma \text{effets} = M y_M''$

$M y_M'' + K y_M = -Mg$

2.8 Solution générale équation sans second membre:

$A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \\ A, \varphi : \text{à définir d'après les} \\ \text{conditions initiales} \end{array} \right.$

Solution particulière équation complète:

$-\frac{Mg}{K}$

Solution générale équation complète:

$y_M = A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{Mg}{K}$

Conditions initiales: à  $t=0, y_M=0, y_M'=0$

$\left\{ \begin{array}{l} A \cos(\varphi) - \frac{Mg}{K} = 0 \rightarrow A = \frac{Mg}{K} \\ -A \omega_0 \sin(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = 0 \end{array} \right.$

$y_M = \frac{Mg}{K} [\cos(\omega_0 t) - 1]$

2.9 Fréquence  $N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

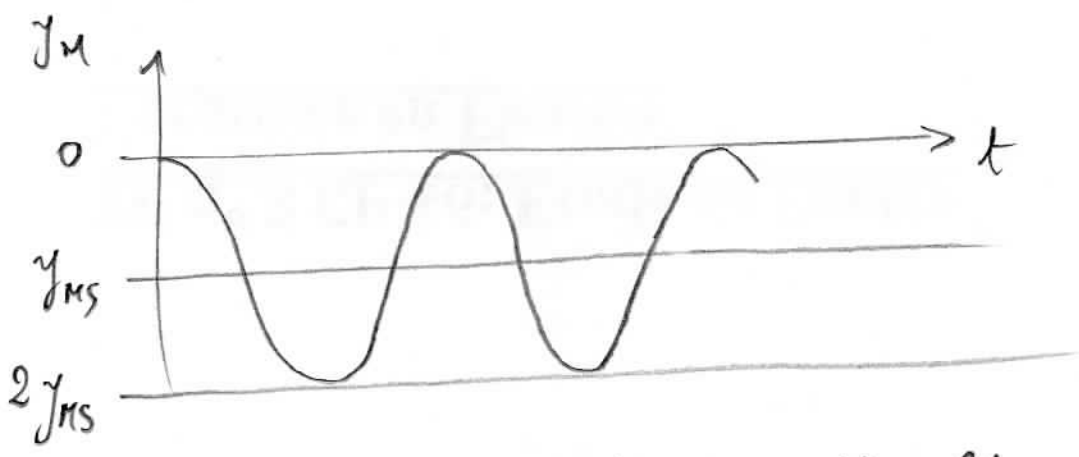
$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{ML^3}}$$

2.10  $N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \times 210 \cdot 10^9 \times 6,29 \cdot 10^{-8}}{11,9 \times 1^3}}$

$$N_0 = 9,18 \text{ Hz}$$

2.11  $y_M$  varie entre 0, sa valeur statique  $y_{MS}$  et 2 fois cette valeur.



$y_{MS}$  a été calculé à la question 2.4

$$y_{MS} = V_3(L)$$

$$y_{MS} = -\frac{MgL^3}{3EI_z}$$

Pour  $\gamma_M = \gamma_{MS}$ , la contrainte maximale, dans la poutre, a été calculée à la question 2.3 :  $\tau_{max\ poutre} = \frac{Mg l b}{2 I_3}$

$$\tau_{max\ au\ cours\ du\ temps} = \frac{Mg L b}{I_3}$$

2.12

$$M_{poutre} = 2 L S \rho$$

$$M_{poutre} = 2 \times 1000 \times 758 \times 7,85 \cdot 10^{-6}$$

$$M_{poutre} = 11,9\ kg$$

$M_{poutre} = M$ , masse des questions précédentes

2.13

Vu en cours pour le cas d'une poutre encastée-libre.

$$\beta^4 = \frac{\rho S \omega_0^2}{E I_3} \quad \text{et} \quad 2L \beta_1 = 1,88$$

$$\omega_{01} = \beta_1^2 \sqrt{\frac{E I_3}{\rho S}}$$

$$N_{01} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2L \beta_1}{2L} \right)^2 \sqrt{\frac{E I_3}{\rho S}}$$

$$N_{01} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1,88}{2 \times 1} \right)^2 \sqrt{\frac{210 \cdot 10^9 \times 6,29 \cdot 10^{-8}}{7850 \times 758 \cdot 10^{-6}}}$$

$$N = 6,63\ Hz$$

2.14

Masses réparties  
→ 6,63 Hz

Masses concentrées  
au centre  
→ 9,18 Hz

Erreur relative  
 $\frac{9,18 - 6,63}{6,63}$

+ 39%  
Erreur assez importante