MQ44 - Printemps 2014
Sujet de l'Examen FINAL
25/06/2014

Durée : 2 h - Documents autorisés
2 exercices indépendants
Barème : 1 point par question

Conseils et consignes

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Contraintes dans une plaque épaulée en traction

Une plaque épaulée est encastrée en son extrémité A et soumise à un effort connu $\vec{F}$, colinéaire à son axe, en son extrémité C, voir Fig. 1.
Entre les points B et C, et à une distance suffisante de ces points, la théorie des poutres peut s'appliquer.
Les questions 1.1 à 1.9 concernent cette zone et sont à traiter dans le cadre de cette théorie.

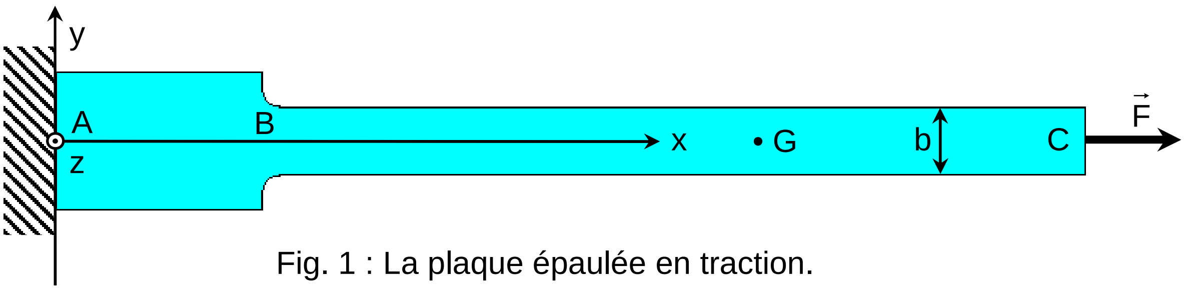

Fig. 1 : La plaque épaulée en traction.

1.1. Soit e l'épaisseur de la plaque (dans la direction z) et b sa largeur entre B et C. Quelle est l'expression de la contrainte normale σ ?

1.2. Exprimer le tenseur des contraintes (σ) en un point G, dans la base alignée sur les axes (Gx, Gy, Gz).
La réponse attendue est une matrice 3 x 3.

1.3. Sachant que le matériau de la plaque est élastique linéaire isotrope, avec un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν, exprimer le tenseur des déformations (ε) au même point, dans la même base.

1.4. Quelles sont les variations relatives de la largeur de la plaque et de son épaisseur (notées $\frac{\Delta b}{b}$ et $\frac{\Delta e}{e}$) ?

1.5. A partir de la matrice des contraintes répondant à la question 1.2, tracer le cercle de Mohr représentatif de l'état des contraintes dans le plan (Gx, Gy).

1.6. Uniquement en observant le cercle de Mohr, donner l'orientation …
… Gx_1 de la normale à la facette pour laquelle la contrainte de cisaillement τ est maximale,
… Gx_2 de la normale à la facette pour laquelle la contrainte de cisaillement τ est minimale.
Ces orientations seront définies par les angles θ_1 et θ_2 que font les axes Gx_1 et Gx_2 par rapport à l'axe Gx.

1.7. Après avoir vu les valeurs des différentes contraintes sur le cercle de Mohr, donner la matrice (σ') des contraintes planes (matrice 2 x 2) dans la base alignée avec les axes Gx_1 et Gx_2.

1.8. Diagonaliser la matrice (σ') et commenter le résultat.

1.9. Application numérique.

E = 200 GPa	ν = 0,3	F = 23 kN
b = 25 mm	e = 4 mm	

Calculer σ (question 1.1), puis Δb et Δe (question 1.4).

1.10. La limite d'élasticité du matériau est R_e = 240 MPa.
Cette limite sera-t-elle dépassée en un point de l'ensemble de la pièce ?
Pourquoi ?

2. Flexion et vibrations d'une poutre encastrée

Une poutre droite horizontale, de longueur 2L, est encastrée à l'une de ses extrémités, libre à l'autre, et supporte une masse ponctuelle M en son centre, voir Fig. 2.
Cette poutre est fléchie sous l'effet du poids de la masse M soumise au champ de la pesanteur terrestre g.
Pour les questions 2.1 à 2.11, la masse propre de la poutre n'est pas prise en compte.

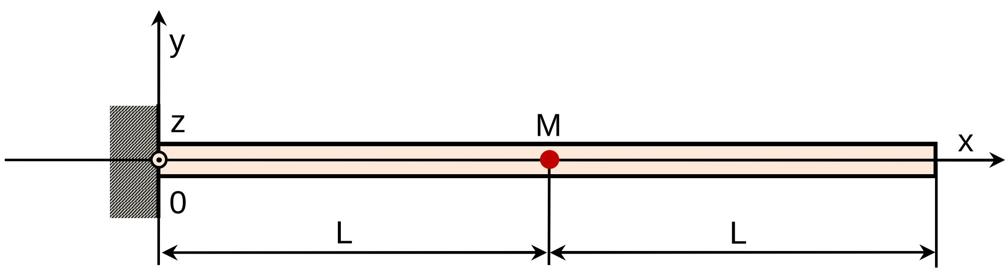

Fig. 2 : Poutre encastrée-libre.

2.1. Donner l'expression du moment fléchissant M_z qui apparaît dans la poutre, pour x compris entre 0 et L, en fonction de M, L, g et x.

2.2. En quelle abscisse x la valeur absolue $|M_z|$ de ce moment fléchissant est-elle maximale et quelle est l'expression de ce maximum $|M_z|_{max}$?

2.3. La poutre possède une section normalisée en I, conforme à la Fig. 3.
Dans la section où $|M_z|$ est maximale, quels sont précisément les points où la contrainte normale induite est maximale.
Illustrer la réponse par un croquis et donner l'expression de cette contrainte normale maximale σ_{max}.

MQ44 - Printemps 2014
Sujet de l'Examen FINAL
25/06/2014

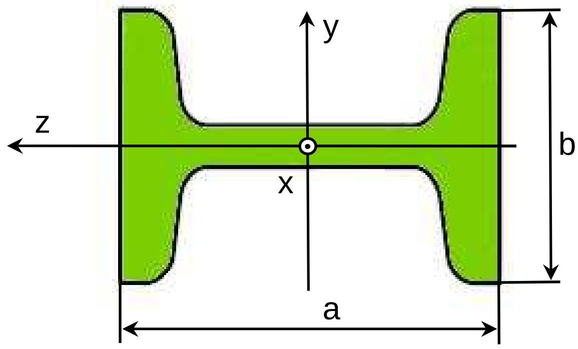

Fig. 3 : La section de la poutre.

2.4. Quel est le déplacement vertical $V_y(L)$ de la section située en x = L ?

2.5. En déduire la rigidité K de la poutre par rapport à un effort exercé verticalement en x = L, à exprimer uniquement en fonction de L, du module d'Young E du matériau de la poutre, et du moment quadratique I_z de sa section.

2.6. La position verticale de la masse M est notée y_M.
A l'état statique, sa position y_{MS} est égale au déplacement $V_y(L)$ déjà calculé.
Elle est amenée à $y_M = 0$, puis, à l'instant t = 0, elle est libérée sans vitesse initiale.
A un instant ultérieur t quelconque, quels sont les efforts agissant sur la masse M ?

2.7. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la masse M et en déduire l'équation différentielle que doit satisfaire $y_M(t)$.

2.8. En tenant compte des conditions initiales, donner la solution $y_M(t)$ de cette équation.

2.9. Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner l'expression de sa fréquence N_0 (la fréquence propre du système), en fonction de M, E, L et I_z.

2.10. Application numérique.

M = 11,9 kg	E = 210 GPa
L = 1 m	$I_z = 6{,}29.10^{-8}$ m^4

Calculer la fréquence propre N_0.

2.11. Quelle est la valeur maximale de la contrainte normale σ qui sera atteinte dans la poutre, au cours du temps ?

2.12. Pour cette question et la suivante, la poutre ne supporte plus une masse ponctuelle en son centre, mais on tient compte de sa masse propre, répartie sur toute sa longueur.
Quelle est la valeur de cette masse en fonction de la section S de la poutre, de la masse volumique ρ de son matériau et de sa demi-longueur L ?
Calculer numériquement la masse de la poutre avec les données suivantes :

L = 1 m	S= 758 mm^2	ρ = 7850 kg/m^3

2.13. En utilisant les résultats vus en cours, calculer numériquement la première fréquence propre de la poutre possédant une masse répartie.

2.14. Commenter.
Est-ce qu'une erreur importante est commise si, pour le calcul de la première fréquence propre d'une poutre encastrée-libre, on considère que la masse est concentrée au milieu au lieu d'être répartie sur toute la longueur ?