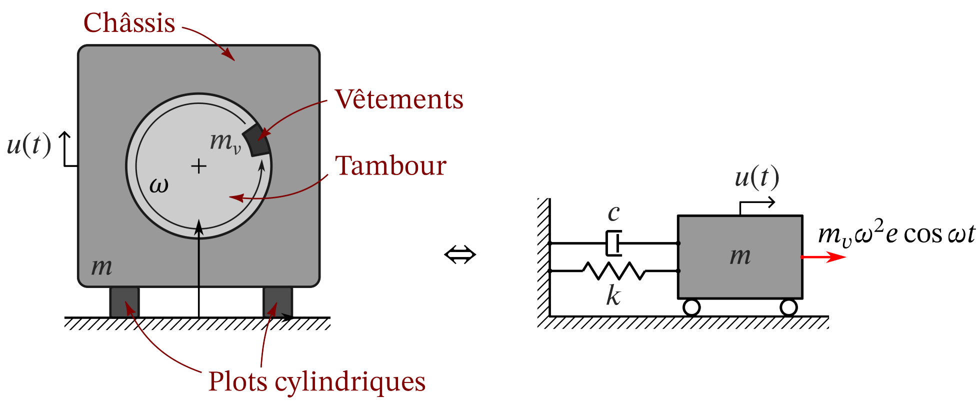
Examen final de l'UE MQ44 - Partie vibration

UTBM – MQ44

Lundi 12 Janvier 2026 — durée 2h

Exercice 1 : (10 points) Modélisation 1 DDL d'une machine à laver

Nous considérons une machine à laver le linge où le tambour est en rotation pure par rapport au châssis. Autrement dit, le tambour n'effectue que des rotations autour de son axe et ne peut pas se translater par rapport au châssis, contrairement aux machines modernes où le tambour est "flottant" (cela sera considéré en Exercice 2).



Nous notons m la masse de la machine, et m_v la masse des vêtements placés dans le tambour créant un balourd d'excentricité e. La machine est supportée par quatres plots cylindriques de rayon R, de hauteur L, et fait d'un matériau de module d'Young E. La masse de ces plots est négligée. Nous supposons que la présence de ces plots introduit une dissipation modélisée ici à l'aide d'un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c. Le tambour tourne à vitesse de rotation constante notée ω.

But : Il s'agit dans cet exercice de modéliser et d'étudier le comportement vibratoire d'un tel dispositif.

1. (3 points) **Oscillateur linéaire masse-ressort-amortisseur.**
   (a) (1 point) En considérant que les quatres plots travaillent en traction/compression, expliquer que l'effort vertical des plots sur la machine est donné par :

   $$F_y(\text{plots} \to \text{machine}) = -c\dot{u}(t) - ku(t)$$

   où $k = 4\dfrac{E\pi R^2}{L}$.
   Rappel : la raideur équivalente d'une barre élastique est $k_{\text{barre}} = EA/L$.

   (b) ($1\frac{1}{2}$ points) L'effort de balourd est donné par :

   $$F_y(\text{vêtements} \to \text{machine}) = m_v\omega^2 e\cos\omega t.$$

   Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la machine (masse m) et donner l'équation régissant le mouvement de la machine. La mettre sous la forme suivante :

   $$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{m_v}{m}\omega^2 e\cos\omega t, \forall t$$

où ω_0 et ζ sont des quantités à détailler (nom + expression).

(c) ($1/2$ point) Sommes-nous dans un cas d'oscillation libre ou d'oscillation forcée ? Est-il important de connaître les conditions initiales pour ce problème ?

2. (5 points) **Résolution.**

(a) ($1/2$ point) Le régime établi du problème vibratoire peut être obtenu en cherchant une solution particulière de la forme :

$$u(t) = U\cos(\omega t - \varphi).$$

Physiquement, que cela signifie ?

(b) ($1/2$ point) La méthode des complexes consiste à d'abord chercher la solution dans $\mathbb{C}$, soit :

$$\underline{u}(t) = \underline{U}\exp(\mathrm{i}\omega t).$$

Quel est le lien entre l'amplitude complexe $\underline{U}$ avec U et φ de la solution réelle ?

(c) ($1\frac{1}{2}$ points) Par substitution, montrer que l'amplitude complexe est donnée par :

$$\underline{U} = \frac{m_v e}{m}\frac{\omega^2/\omega_0^2}{(1-\omega^2/\omega_0^2) + 2\mathrm{i}\zeta\omega/\omega_0}.$$

(d) ($1/2$ point) En déduire que pour des vitesses de rotation faibles ($\omega \ll \omega_0$), la machine à laver ne vibre pas.

(e) (1 point) En déduire que pour des vitesses de rotation élevées ($\omega \gg \omega_0$), la machine à laver vibre avec une amplitude égale à $m_v e/m$.

i. Quel est l'impact de l'augmentation de la masse de vêtements ?

ii. Quel est l'impact de l'augmentation de la taille du tambour ?

(f) ($1/2$ point) Que se passe-t-il lorsque $\omega \approx \omega_0$?

(g) ($1/2$ point) Schématiser à "main levée" et annoter le graphe de l'amplitude des oscillations de la machine U en fonction de la vitesse de rotation ω.

3. (2 points) **Dimensionnement des plots.**

Les plots cylindriques doivent être dimensionnés pour supporter la masse de la machine en mouvement, et de sorte à limiter les efforts transmis au sol. Le déplacement vertical de la machine et l'effort transmis au sol sont donnés dans notre problème par :

$$u(t) = \frac{m_v e}{m}\beta_u(\omega)\cos(\omega t - \varphi),$$
$$F_y(\text{plots} \to \text{sol}) = k\frac{m_v e}{m}\beta_F(\omega)\cos(\omega t - \varphi_F),$$

où $\beta_u(\omega)$ et $\beta_F(\omega)$ sont les coefficients d'amplification dynamique en déplacement et en effort, respectivement.

(a) ($1/2$ point) En déduire qu'il est intéressant d'avoir une masse m importante.

(b) ($1/2$ point) Discuter de l'impact d'avoir des plots rigides/souples.

(c) (1 point) Au regard de l'allure des coefficients d'amplification dynamique donnés en Figure 1, commenter quel serait un choix adéquat de taux d'amortissement. Est-il judicieux d'avoir un taux d'amortissement important ?

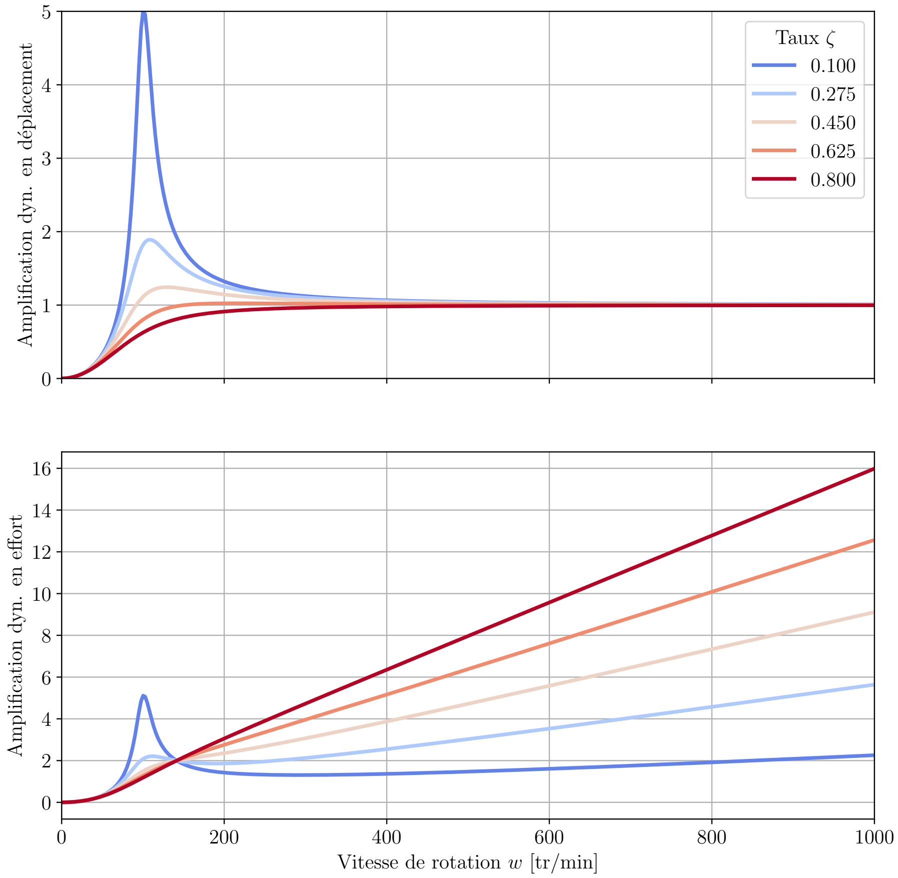
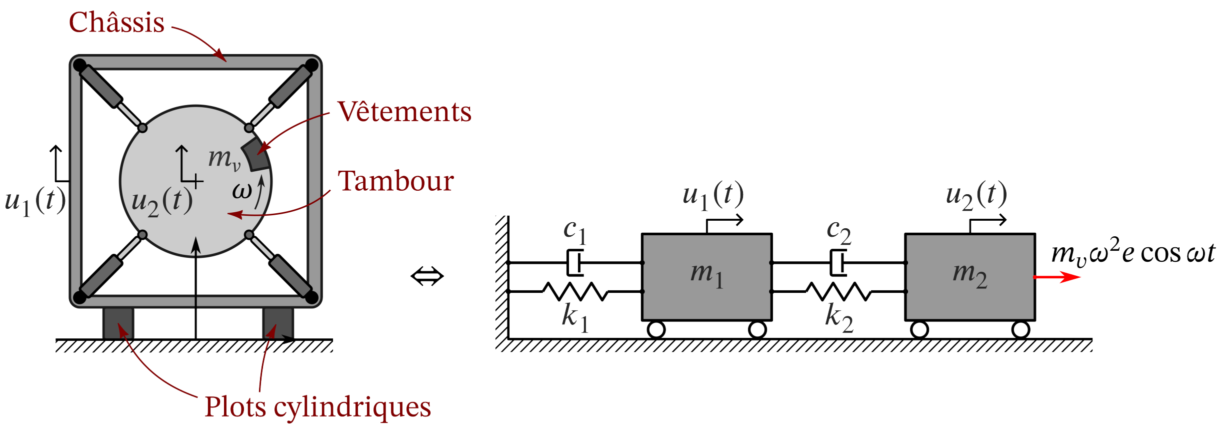


FIGURE 1 – Influence du taux d'amortissement sur les coefficients d'amplification dynamique β_u et β_F.

Exercice 2 : (6 points) Modélisation 2 DDL d'une machine à laver

Nous considérons désormais une machine à laver le linge où le tambour est flottant par rapport au châssis : le tambour peut se translater verticalement par rapport au châssis. C'est le cas pour les machines à laver actuelles.



Nous proposons ici de modéliser le problème à l'aide d'un système à deux degrés de liberté :

- $u_1(t)$ mesure le déplacement vertical du châssis, dont la masse est notée m_1 ;
- $u_2(t)$ mesure le déplacement vertical du tambour, dont la masse est notée m_2 ;
- c_1 et k_1 caractérisent la raideur et l'amortissement des plots cylindriques;
- c_2 et k_2 caractérisent la raideur et l'amortissement du système de suspension du tambour.
- Le balourd dû à la présence des vêtements impose un effort harmonique sur le tambour dont l'expression est :

$$F_y(\text{vêtements} \rightarrow \text{tambour}) = m_v\omega^2 e \cos\omega t,$$

dépendant de m_v la masse des vêtements, de l'excentricité e, et de la vitesse de rotation du tambour ω.

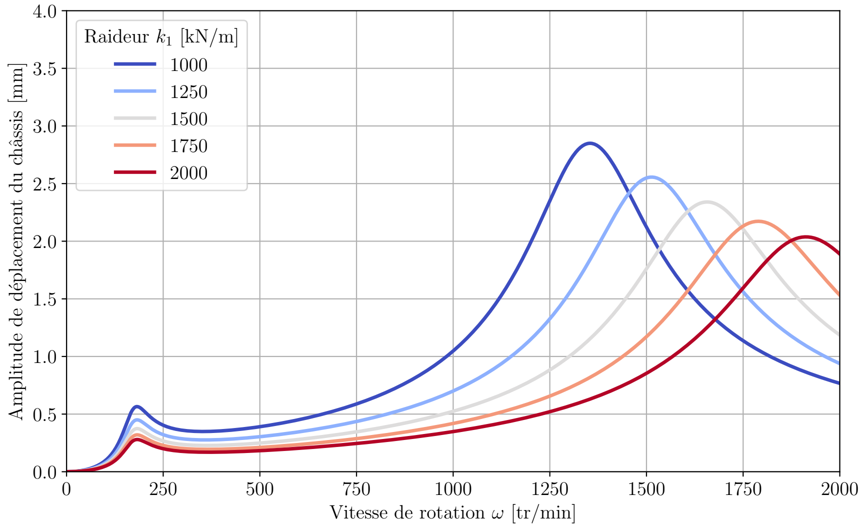
1. (2 points) **Système à 2 DDL :**
Montrer en appliquant le principe fondamental de la dynamique aux deux masses que les équations du mouvement sont, sous forme matricielle, données par :

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_v\omega^2 e \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

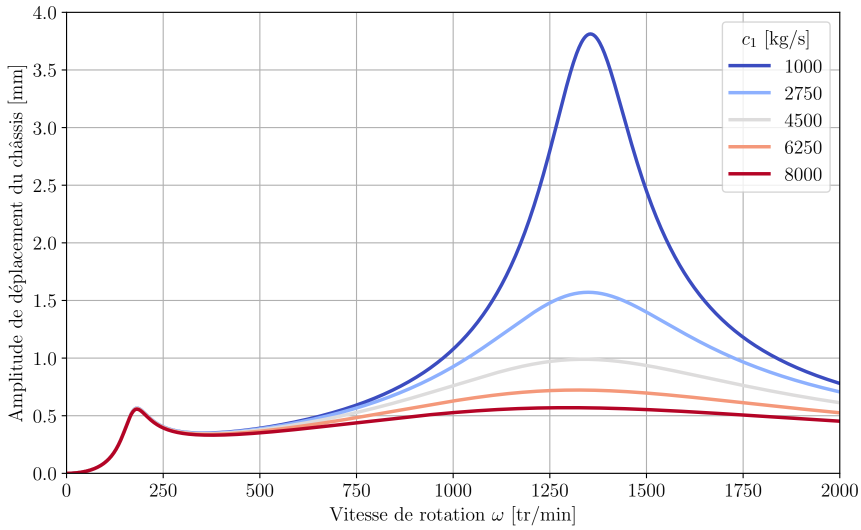
2. (2 points) **Modes de vibrations :**
Il peut être intéressant de déterminer les modes de vibrations du système avant de s'intéresser au problème d'oscillation forcée.
   (a) ($\frac{1}{2}$ point) Qu'est-ce qu'un mode de vibration ?
   (b) ($\frac{1}{2}$ point) Quel problème aux valeurs propres serait à résoudre pour obtenir les deux modes de vibrations de notre système ?
   (c) (1 point) La résolution donne les deux modes de vibrations suivants :

$$\omega_a = 174\,\text{tr/min}, \quad \mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \omega_b = 1914\,\text{tr/min}, \quad \mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.008 \end{pmatrix}.$$

   Quel composant risque d'osciller largement lorsque la vitesse de rotation du tambour est proche de la première pulsation propre ω_a ?
   Même question : que se passe-t-il lorsqu'on se rapproche de ω_b ?



(a)



(b)

FIGURE 2 – Influence de (a) la raideur et de (b) l'amortissement des plots cylindriques sur l'amplitude du déplacement du châssis.

3. (2 points) **Dimensionnement :**

   La vitesse de rotation durant l'essorage est généralement supérieure à 400 tr/min jusqu'environ 1400 tr/min.

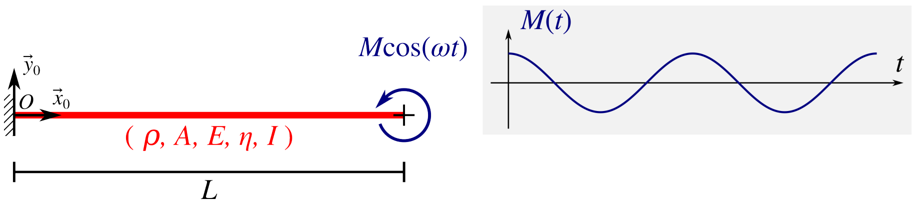
   (a) Au regard des résultats présentés en Figure 2(a), est-il pertinent d'avoir des plots cylindriques à l'interface machine/sol souples ?

   (b) Au regard des résultats présentés en Figure 2(b), est-il pertinent d'avoir des plots cylindriques à l'interface machine/sol peu dissipatif ?

   (c) Commenter alors l'apport d'un tapis anti-vibration en caoutchouc sur lequel la machine à laver le linge serait posée.

Exercice 3 : (4 points) Vibration forcée d'une poutre métallique

Il s'agit dans cet exercice d'étudier le comportement vibratoire d'une poutre métallique sollicitée ainsi :



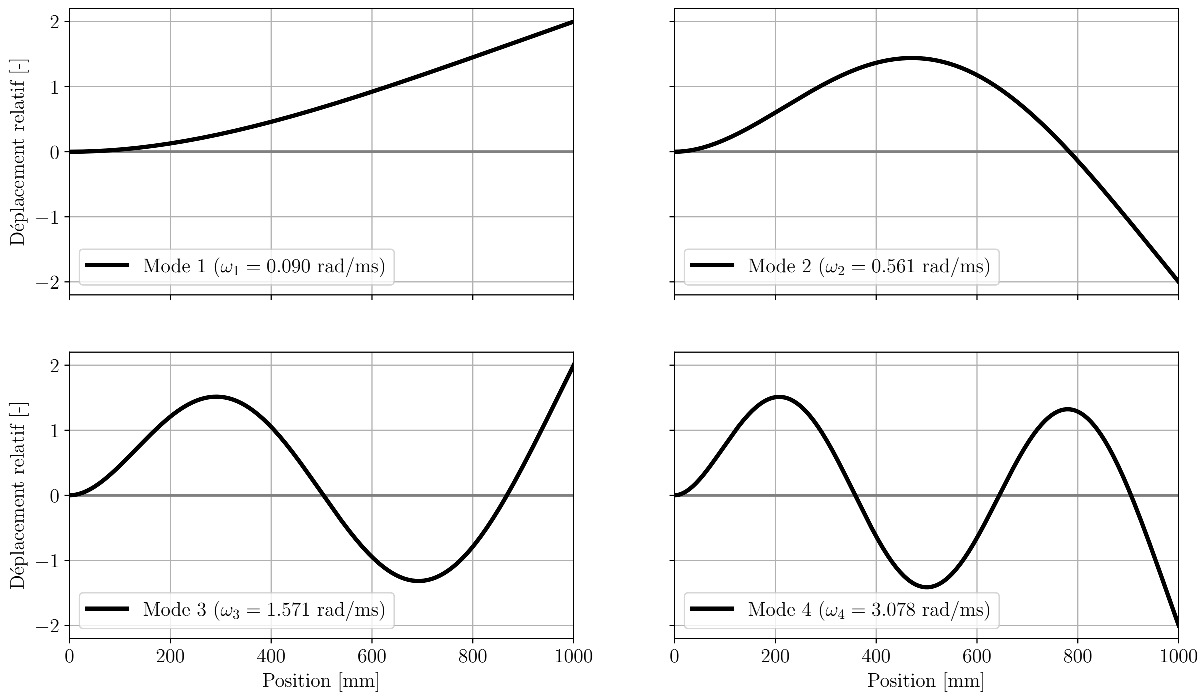
L'extrémité "gauche" en $x = 0$ est encastrée, et l'extrémité "droite" en $x = L$ est soumise à un moment harmonique de magnitude M et de pulsation ω.

Rappel : les équations de mouvement d'une poutre travaillant en flexion sont :

Cas conservatif : $\rho A\ddot{u}(t,x) + EIu''''(t,x) = 0, \forall t, \forall x,$

Cas dissipatif : $\rho A\underline{\ddot{u}}(t,x) + E^* I\underline{u}''''(t,x) = 0, \forall t, \forall x,$ où $E^* = E(1 + i\eta).$

1. ($1\frac{1}{2}$ points) Écrire le système d'équations (équation du mouvement + conditions aux limites) associé à ce problème vibratoire.
2. ($\frac{1}{2}$ point) Donner brièvement les étapes permettant sa résolution (sans résoudre !).
3. (2 points) Les quatres premiers modes de vibration de la poutre encastrée-libre étudiée ici sont les suivants :



Donnons également la solution statique de notre problème (cas $\omega = 0$) :

$$u_{\text{statique}}(x) = \frac{M}{2EI}x^2.$$

Que nous informent ces modes de vibrations sur le comportement dynamique de la structure ? En particulier, quelle sera la réponse de la poutre pour le problème de vibration forcée précédent ? Discuter de l'influence de la pulsation d'excitation ω.