FINAL

AUTOMNE 2015

2 H

ETUDE DU MOUVEMENT GYROSCOPIQUE D'UNE TOUPIE

Seul le document reprographié est autorisé

Les 3 documents réponses sont à rendre en fin d'épreuve

Partie culturelle

Le gyroscope a été inventé, en 1852, par Foucault pour fournir la preuve directe de la rotation de la terre. L'effet gyroscopique est la tendance qu'à tout solide de révolution, animé d'un mouvement de rotation rapide autour de son axe, à s'opposer à toute action mécanique visant à modifier la direction de celui-ci.

Le gyroscope dont l'axe de rotation définit une direction fixe de l'espace a donné lieu à diverses applications :

- le compas gyroscopique, employé dans les transports maritimes et aériens
- l'horizon artificiel et l'indicateur de virage, utilisés sur les avions etc…

I- Objectif de l'étude

Afin d'appréhender le phénomène gyroscopique, je vous propose l'étude du jouet d'enfants, qu'est la toupie.

Description et paramétrage

Le repérage de l'orientation de la toupie ci-dessous étant impossible avec les angles d'Euler (ceux-ci n'étant pas définis pour $\theta = 0$), nous utiliserons les angles de la « toupie dormante » soient α, β et γ.

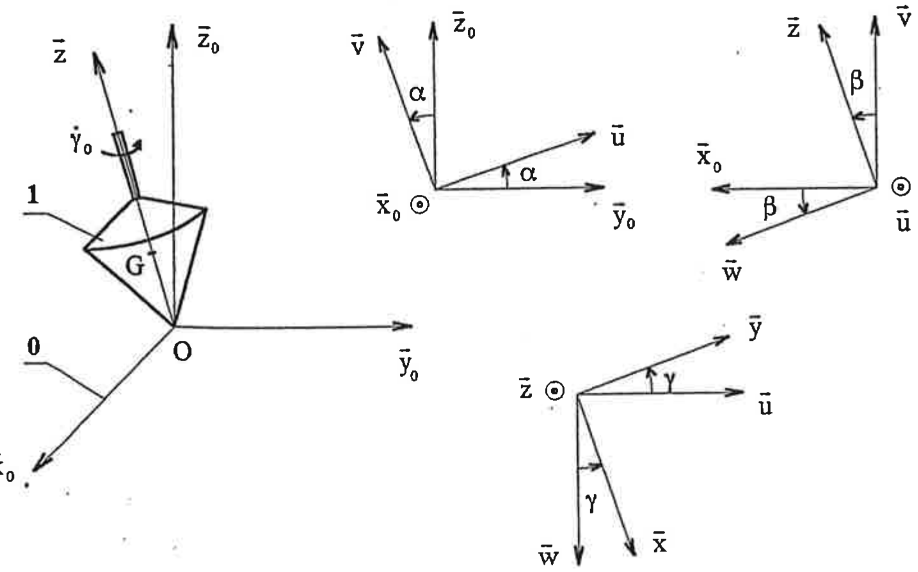


figure 1

Soit un plan **0** confondu avec le plan $(O,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ du repère galiléen $R_0(O,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$.
On désigne par $-g\,\bar{z}_0$ le vecteur accélération de la pesanteur (figure 1)

Une toupie **1**, animée d'un mouvement de rotation rapide autour de son axe de révolution, est lancée sur le plan **0**, de telle façon que sa pointe reste constamment confondue avec l'origine O du repère R_0. La liaison en O est équivalente à une liaison rotule sans frottement.

Soit $R(O,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ un repère lié à la toupie **1**. L'axe $(O,\bar{z})$ est disposé suivant l'axe de révolution de la toupie. La position du repère R par rapport au repère R_0 est définie par les trois angles α, β, γ.

Le repère $R_1(O,\vec{x}_0,\vec{u},\vec{v})$ est tel que : $\alpha = (\vec{y}_0,\vec{u}) = (\vec{z}_0,\vec{v})$.

Le repère $R_2(O,\vec{w},\vec{u},\vec{z})$ est tel que : $\beta = (\vec{v},\vec{z}) = (\vec{x}_0,\vec{w})$.

Le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est tel que : $\gamma = (\vec{w},\vec{x}) = (\vec{u},\vec{y})$.

La *rotation propre* $\dot{\gamma}_0$ est grande et constante.

On note :

- m la masse de la toupie et G son centre d'inertie, tel que : $\vec{OG} = a\vec{z}$ $(a > 0)$.

- la matrice d'inertie en O de la toupie : $[I_O(1)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$

II- Travail à effectuer

4-1Compléter le graphe des liaisons du document réponses 1 ainsi que la figure des changement de base.

4-2Déterminer l'énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à 0 ; **compléter** DR1

4-3Déterminer les différentes contributions énergétiques et **compléter** le tableau du DR1

4-4Vérifierensuite que l'équation de Lagrange $\mathbf{L_{\beta,1/0}}$ de la toupie en mouvement par rapport au référentiel galiléen Ro est :
(afin d'alléger l'écriture, on posera : $\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\sin\beta = r_0$ (avec ro = constante))

$$\mathbf{L_{\beta,1/0}} \rightarrow \mathbf{A(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 sin\beta cos\beta) - mga\ sin\beta cos\alpha - Cr_0\dot{\alpha}cos\beta = 0}$$

Compléter DR1

Les deux autres équations vous sont fournies à titre gracieux (eh oui Noël n'est pas si loin !!) :

$$\mathbf{L_{\alpha,1/0}} \rightarrow A\left(\ddot{\alpha}\cos^2\beta - 2\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\right) + \mathbf{C}r_0\dot{\beta}\cos\beta - \text{mga}\sin\alpha\cos\beta = 0$$

$$\mathbf{L_{\gamma,1/0}} \rightarrow \dot{\gamma} + \dot{\alpha}sin\beta = r_0 = constante$$

4-5 Nommer ces équations de Lagrange. **Justifier** simplement. **Compléter** DR2

4-6 Relever et nommer les termes de couplage. **Compléter** DR2

4-7 Ce mouvement est un mouvement ***stationnaire***. **Justifier** ce qualificatif. **Compléter** DR2

4-8 **Rechercher** les équilibres paramétriques de ce mouvement stationnaire.**Ecrire** les équations d'équilibre sur DR2 et **compléter**le tableau de DR2

4-9 Pour l'équilibre paramétrique suivant : $\alpha_é = 0$ et $\beta_é = 0$, **linéariser** les équations de Lagrange ; **les écrire** sur DR3

4-10

En recherchant des solutions du type : $\varepsilon_i = X_i\, e^{rt}$, **vérifier** sur **DR3** que vous obtenez l'équation caractéristique suivante :

$$\boxed{A^2\, \mathbf{r}^4 + (C^2 r_o^{\,2} - 2Amga)\, \mathbf{r}^2 + m^2 g^2 a^2 = 0}$$

4-11 En utilisant la remarque en annexe, **déterminer** alors la valeur littérale minimale de $\mathbf{r_o}$, en fonction de **A**, **C**, m, g et a pour avoir stabilisation gyroscopique du mouvement de la toupie et **l'écrire** sur DR3.

4-12 Application numérique :

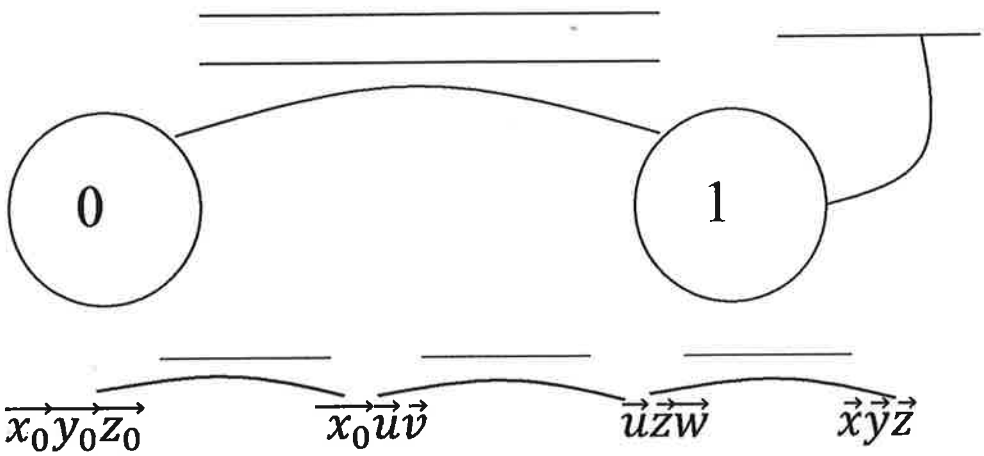
La toupie est assimilée à un tronc de cône de révolution plein et homogène de cercle de base r = 25 mm, de hauteur h = r/2 ; l'accélération de la pesanteur vaut :
$g = 9{,}81\ m/s^2$
On rappelle que pour un tronc de cône :

$C = 3/10\ m\, r^2$; $A = 3/20 * m * (r^2 + 4 * h^2)$;
et $a = ¾ * h$

Calculer $\mathbf{r_o}$ minimale et l'écrire sur **DR3**

Fin…
Bon intersemestre !

A compléter :



$2T_{1/Ro} =$ ____________________

Contributions énergétiques :

$Q_{\alpha,pes\to1/0}$	
$Q_{\beta,pes\to1/0}$	
$Q_{\gamma,pes\to1/0}$	
$Q_{\alpha,0\to1/0}$	
$Q_{\beta,0\to1/0}$	
$Q_{\gamma,0\to1/0}$	

Expressions de :

$$\frac{\partial T_{1/0}}{\partial \beta} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial T_{1/0}}{\partial \dot{\beta}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Document réponses 1 **NOM :**

Nom des équations de Lagrange et justification :

____

____

____

Termes de couplage : ______________ leur nom : ______________

Justification du terme stationnaire :

____

____

Ecriture des deux équations d'équilibre :

____

____

Tableau à compléter :

Valeurs de $\alpha_é$	**Valeurs de $\beta_é$**
0	**0**

Document réponses 2 **NOM :**

Ecriture des deux équations linéarisées :

$L_{\alpha\_liné,1/0} \rightarrow$ ____

$L_{\beta\_liné,1/0} \rightarrow$ ____

Vérification de l'équation caractéristique :

____

____

____

____

____

____

____

____

Expression littérale de r_o :

$r_o \geq$ ____________________

Valeur numérique de r_o :

$r_o \geq$ ______________ **rad/s**

$r_o \geq$ ______________ **tr/min**

Document réponses 3 **NOM :**

*Soit un polynôme de degré deux : $a x^2 + b x + c$;
les racines de ce polynôme sont bien évidemment:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

jusque là, rien d'intéressant; par contre les remarques qui suivent, risquent de l'être.
On peut donc remarquer que :

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

à partir de ces deux remarques , nous pouvons mettre en place nos conditions pour avoir des racines réelles distinctes strictement négatives.

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 \times x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \\ \text{sans oublier} \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0 \end{array}}$$

Ce qui donnera pour une équation bicarrée , des racines imaginaires pures; donc stabilité du système étudié.

Annexe