Final

Durée : 1h30

ETUDE D'UN PENDULE SPHERIQUE

SEUL LE DOCUMENT REPROGRAPHIE INTITULE « Mécanique Analytique » EST AUTORISE.

Répondre directement sur les documents réponses DRi à rendre en fin d'épreuve

ETUDE DU PENDULE SPHERIQUE

Présentation (voir annexe 1 page 5)

Un pendule (**P**) est constitué d'une tige (**T**) de longueur 2L et de masse m. Il est en liaison rotule de centre O avec le bâti (B).

Paramétrage (voir annexe 1 page 5)

On repère son orientation par rapport au référentiel galiléen, lié au bâti, par les deux premiers angles d'Euler : (angle de précession Ψ et de nutation Θ).
Afin de vous aider, des figures de calculs sont données en annexe 1 page 5.

Données

Longueur de la tige : **2L** ; Masse de la tige : **m** ; Pesanteur $\vec{g} = \|\vec{g}\|\vec{y}$
Tenseur d'inertie de la tige :

$$[I_T]_{O,\vec{u}\vec{v}\vec{w}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \text{ avec } A = 4/3\ mL^2$$

Actions mécaniques du bâti sur la tige T :

$$\{\tau_{B\to T}\}_{o,\vec{x}\vec{y}\vec{z}} = \left\{ \begin{array}{c:c} \|\vec{X}_{BT}\| & 0 \\ \|\vec{Y}_{BT}\| & 0 \\ \|\vec{Z}_{BT}\| & 0 \end{array} \right\}$$

Objectifs de l'étude

Déterminer les équations du mouvement du pendule afin d'étudier la variation des paramètres angulaires : angles de précession Ψ et de nutation Θ en fonction du temps.

Travail à effectuer

1°) **Compléter, sur DR1,** le graphe des liaisons

2°) **Ecrire, sur DR1,** le vecteur vitesse angulaire du pendule par rapport à R_0, noté $\overrightarrow{\Omega_{P/R0}}$, dans la base$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

3°) **Calculer puis écrire, sur DR1,** le double de l'énergie cinétique du pendule P par rapport à R_0. Elle sera notée : $\mathbf{2T_{P/R0}}$

4°) **Déterminer, sur DR2,** les différentes contributions énergétiques et **compléter** le tableau **sur DR2**

5°) **Déterminer, sur DR3,** et **vérifier** que les équations de Lagrange du pendule sont :

$$L_{\theta,P/R0} \rightarrow \{\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 sin\theta cos\theta\} + \frac{3g}{4L} sin\theta = 0$$

$$L_{\psi,P/R0} \rightarrow \ddot{\psi} sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} cos\theta = 0$$

6°) **Nommer, sur DR 3,** ce type d'équations obtenues.

Sur l'annexe 2 page 6 sont fournies les évolutions des paramètres angulaires Ψ et Θ ainsi que de leurs dérivées respectives.

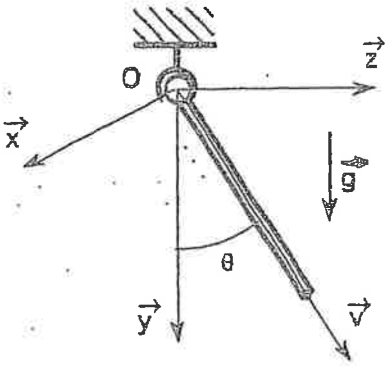
7°) analyse des résultats par les équations : **compléter** la phrase du **DR4**

8°) La résolution de ces équations a été effectuée avec Matlab Simulink en utilisant la méthode numérique de : Dormand-Prince (puisque comme vous l'avez remarqué, ces équations ne sont pas linéaires !!!) avec les conditions initiales et valeurs numériques des paramètres géométriques suivants :

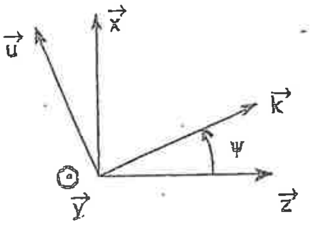
$$\boldsymbol{\theta_0 = \pi/6 \text{ rad} \; ; \; \dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s} \; ;}$$
$$\boldsymbol{\psi_0 = 0 \text{ rad} \; ; \; \dot{\psi}_0 = 1 \text{ rad/s}}$$
$$\|\vec{g}\| = \boldsymbol{10 \text{ m/s}^2 \; ; \; L = 0{,}1 \text{ m}}$$

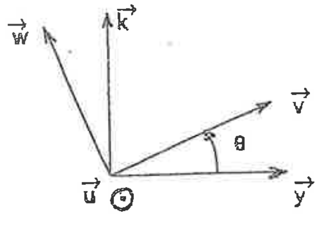
en analysant ces résultats, **expliquer** brièvement, **sur DR4**, du ***point de vue mécanique***, pourquoi Θ ne devient jamais négatif.

Fin
Bon intersemestre !

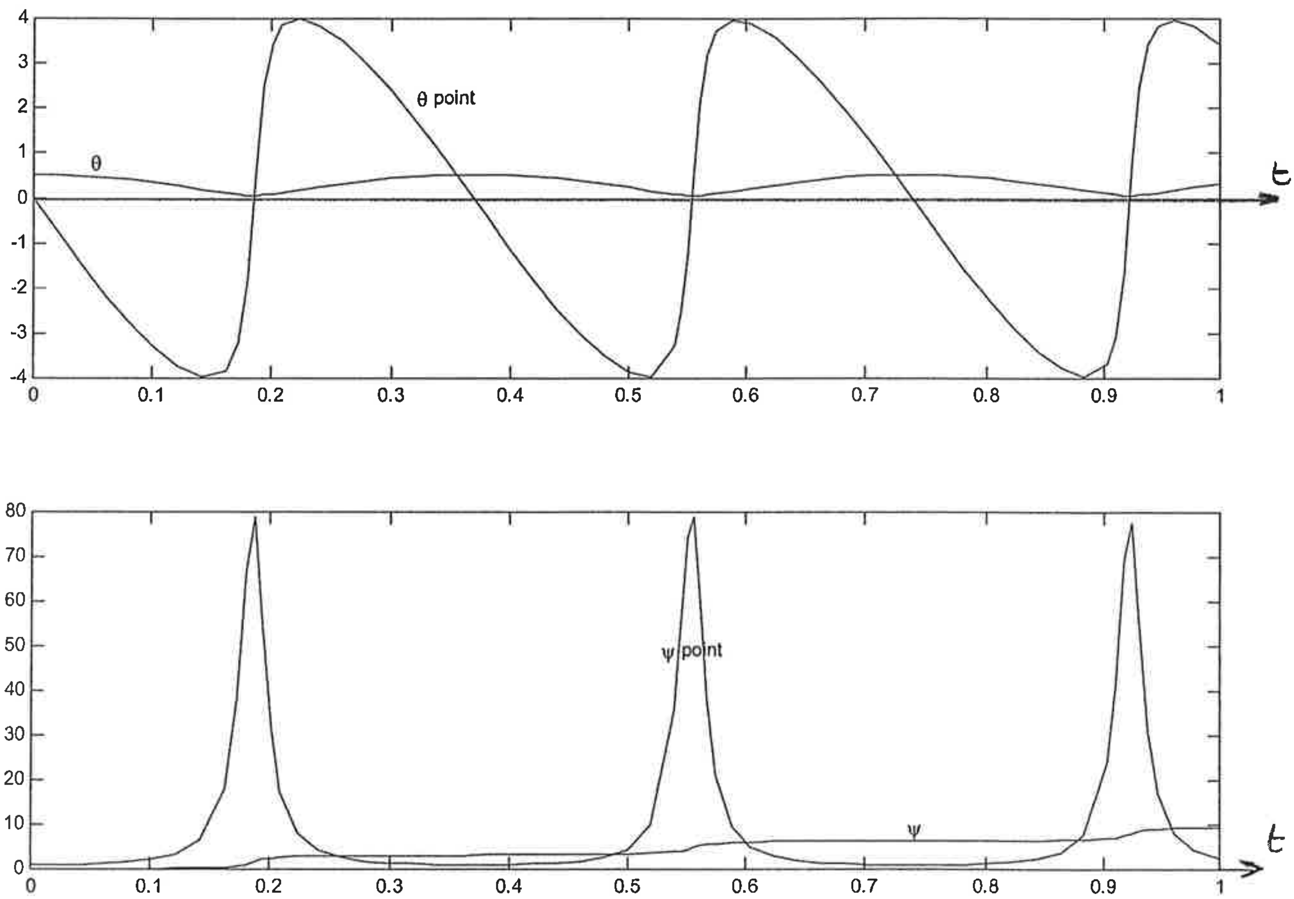


$$\begin{array}{ccccc} (\vec{x},\vec{y},\vec{z}) & \longrightarrow & (\vec{u},\vec{y},\vec{k}) & \longrightarrow & (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \\ b_0 & & b_1 & & b_2 \end{array}$$



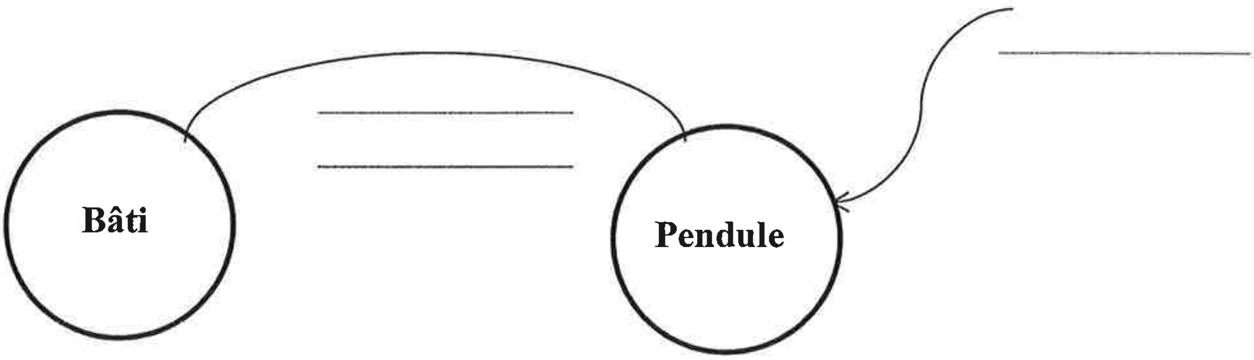


ANNEXE 1


θ point
θ
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ψ point
ψ
t
80
70
60
50
40
30
20
10
0

ANNEXE 2

Graphe des liaisons à compléter :



Ecriture de $\overrightarrow{\Omega_{P/R0}}$ **(dans la base** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$**) :**

$\overrightarrow{\Omega_{P/R0}}$: ____________________

Calcul et écriture de $2T_{P/R0}$ **:**

$2T_{P/R0} =$ ____________________

NOM :

DR1

Détermination des différentes contributions énergétiques :

$Q_{\theta,B\to P/Ro} =$

$Q_{\psi,B\to P/Ro} =$

$Q_{\theta,Pes\to P/Ro} =$

$Q_{\psi,Pes\to P/Ro} =$

Tableau à compléter :

q_i	$Q_{qi,Pes\to P/Ro}$	$Q_{qi,B\to P/Ro}$
Θ		
Ψ		

NOM :

DR2

Détermination des équations de Lagrange :

$L_{\theta,P/R0} \rightarrow$?

$L_{\psi,P/R0} \rightarrow$?

$L_{\theta,P/R0} \rightarrow$

$L_{\psi,P/R0} \rightarrow$

Nommer ce type d'équations :

NOM :

DR3

Analyse des résultats :

Phrase à compléter : Si $\dot{\psi} = 0$ alors $\ddot{\psi} =$ ………., on obtient donc l'équation d'un ………………..

à l'aide des courbes de l'annexe 2:

avec $\dot{\psi} \neq 0$ lorsque θ diminue, $\dot{\psi}$ augmente-diminue (barrer la mention inutile)

Justifiez :

NOM :

DR4