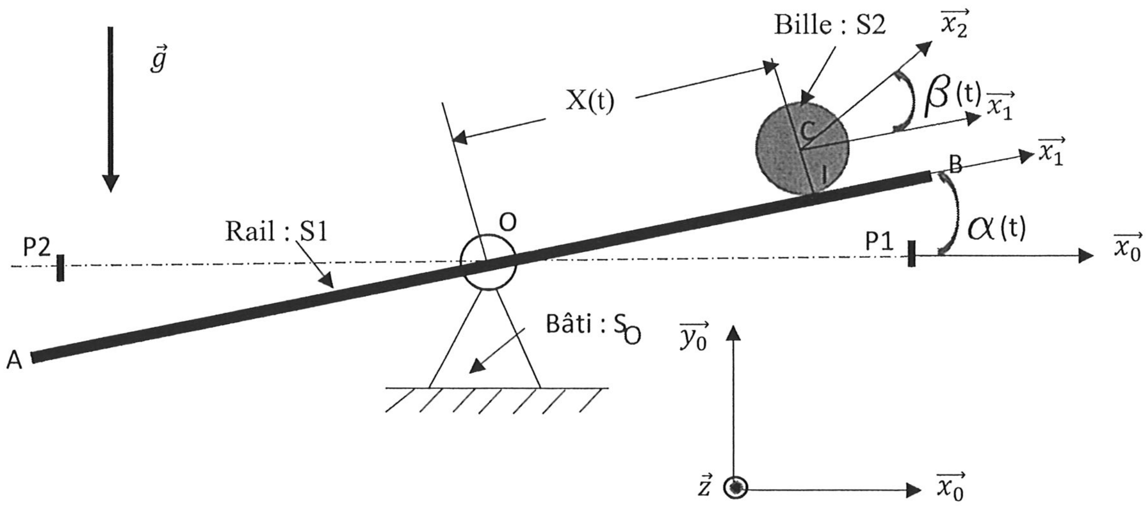
Final

Durée : 1h30 – tout document autorisé

Recherche des équations du mouvement d'un process type « bascule à bille »

Les documents réponses DR1 et DR2 sont à rendre en fin d'épreuve

On considère un process « bascule à bille » , modélisé comme ci-dessous, dont l'objectif est de faire passer la bille d'une position P1 à une position symétrique P2 par basculement du rail S1.



avec **g** : accélération pesanteur (m/s²)

$X_{(t)}$: repère la position de la bille par rapport au centre de la liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$

$\alpha_{(t)}$: repère la rotation du rail par rapport à l'horizontale

$\beta_{(t)}$: repère la rotation de la bille par rapport au rail

C : centre inertie de la bille

1- Objectif de l'étude

L'objectif de l'étude est de **déterminer** les équations du mouvement linéarisées du système afin de concevoir une commande (*par retour d'état avec observateur pour les curieux(ses)*) pour contrôler la position de la bille respectant les critères du cahier des charges (temps de réponse, couple maxi autorisé…).

2-Données

concernant le bâti So :

On lie le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}\overrightarrow{y_0}\vec{z})$supposé galiléen, au bâti.

concernant le rail S_1:

On lie le repère $R_1(O, \overrightarrow{x_1}\overrightarrow{y_1}\vec{z})$ au rail. On repère la position angulaire du rail par rapport au bâti par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$

M : masse du rail ; $[I_{S_1}]_{O,b_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}$ O : centre d'inertie du rail ;

AB : longueur du rail notée L

Cm : couple moteur (du à un actionneur de type moteur à courant continu) agissant sur le rail d'axe $(O, \vec{z})$. On note : $\overrightarrow{C_m} = C_m\vec{z}$

concernant la bille S_2 :

On lie le repère $R_2(C, \overrightarrow{x_2}\overrightarrow{y_2}\vec{z})$à la bille.On repère la position angulaire de la bille par rapport au rail par l'angle $\beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$

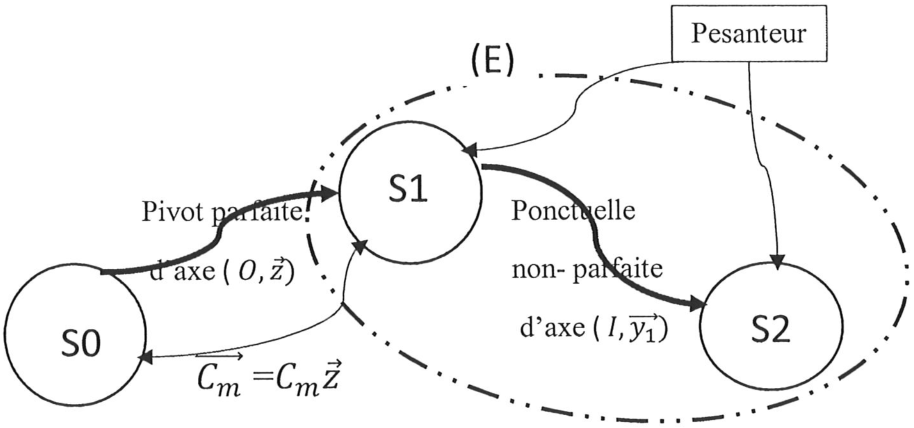
m : masse de la bille ; R : rayon de la bille ; $[I_{S_2}]_{C,b_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}$

La bille roule sans glisser sur le rail au point de contact I.

On donne l'action du rail sur la bille exprimée dans la base b_1, soit :

$$\{T_{S_1 \to S_2}\}_{I,b_1} = \begin{Bmatrix} \|\overrightarrow{T_{S_1 \to S_2}}\| & 0 \\ \|\overrightarrow{N_{S_1 \to S_2}}\| & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Graphe des liaisons grâcieusement offert :



3-Travail à effectuer :

Ecrire directement les résultats sur les documents réponses DR1 et DR2 les calculs étant développés sur la feuille de copie

3-1 Ecrire sur DR1 : $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{b_{2/b_1}}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{b_{1/b_0}}}$

3-2 En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, **déterminer** la relation pseudo-holonome ; relation dont vous ne tiendrez pas compte durant vos calculs lagrangiesques mais que l'on utilisera dès ces calculs finis pour revenir à la réalité !

3-3 **Déterminer** les torseurs cinématiques suivants :

$$\left\{\vartheta_{S_{1/R_O}}\right\}_O \quad ; \quad \left\{\vartheta_{S_{2/R_O}}\right\}_C$$

$$\left\{\vartheta_{S_{2/S_1}}\right\}_I$$

3-3 Déterminer le double de l'énergie cinétique du rail par rapport au bâti, notée : $\mathbf{2T_{S1/Ro}}$

3-4 Déterminer le double de l'énergie cinétique de la bille par rapport au bâti, notée : $\mathbf{2T_{S2/Ro}}$

3-5 En déduire le double de l'énergie cinétique de l'ensemble : **E ={S_1+ S_2}** par rapport au bati, notée : $\mathbf{2T_{E/Ro}}$

3-6 Compléter le tableau du DR2

3-7 Déterminer les trois équations de Lagrange **:** $L_{x,E/R_0}$; $L_{\alpha,E/R_0}$ et $L_{\beta,E/R_0}$

3-8 En utilisant maintenant la relation entre β et x donnée par la relation pseudo holonôme de la question 3-2, **vérifier** qu'on peut réduire nos équations de Lagrange à deux, telles que :

$$L_{x,E/R_0} \rightarrow \left(m + \frac{J_2}{R^2}\right)\ddot{x} - mx\dot{\alpha}^2 + mgsin\alpha - \frac{J_2}{R}\ddot{\alpha} = 0$$

$$L_{\alpha,E/R_0} \rightarrow (mx^2 + J_1 + J_2)\ddot{\alpha} + 2mx\dot{x}\dot{\alpha} - J_2\frac{\ddot{x}}{R} + mgxcos\alpha = C_m$$

3-9 Rechercher les équilibres paramétriques. **Conclure**

3-10 On linéarise autour d'une position d'équilibre réaliste**:** $\alpha_{é} = 0$

On pose alors : $\alpha = 0 + \varepsilon_\alpha$; $x = x_{é} + \varepsilon_x$ et $C_m = C_{mé} + \varepsilon_{Cm}$

Déterminer ces deux équations linéarisées : $L_{\alpha(liné),E/R_0}$ et $L_{x(liné),E/R_0}$

3-11 Application numérique

On donne :

Concernant le rail S_1 : **M =9 kg ; B_1 = 3 kg.m² et** $||\vec{g}|| = 10\ m/s^2$

Concernant la bille S_2 : **m = 1 kg ; R =32 mm ; $A_2 = 4.10^{-4}$ kg.m²**

Ecrire sous forme numérique ces deux équations linéarisées.

3-12 Les mettre sous la forme maricielle suivante :

$$M\ddot{X} + KX = F_{(t)}$$

Vous pouvez remarquer qu'il existe deux types de termes de couplage**, les nommer.**

Un type de ces termes de couplage est négligeable**, citez-le.**

Réécrire alors nos deux équations linéarisées simplifiées (qui nous serviront à mettre en place le contrôleur …)

$$L_{x,E/R_0(liné\_simplifiée)}\ et\ L_{\alpha,E/R_0(liné\_simplifiée)}$$

Fin

1°) Ecriture de :

$$\overrightarrow{\Omega_{b_{2}/b_{1}}} = \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\Omega_{b_{1}/b_{0}}} =$$

2°) Expression de l'équation pseudo-holonome :

____

3°) Expression des torseurs cinématiques

$$\left\{\vartheta_{S_1/R_O}\right\}_O = \left\{ \qquad \right\} \quad ; \quad \left\{\vartheta_{S_2/R_O}\right\}_C = \left\{ \qquad \right\}$$

$$\left\{\vartheta_{S_2/S_1}\right\}_I = \left\{ \qquad \right\}$$

4°) Expression du double de l'énergie cinétique du rail par rapport au bâti, notée :

$2T_{S1/Ro}$ = ______________________________

5°) Expression du double de l'énergie cinétique de la bille par rapport au bâti, notée :

$2T_{S2/Ro}$ = ______________________________

6°) tableau à compléter

q_i	$Q_{q_{i,S_0 \to S_1/R_O}}$	$Q_{q_{i,mot \to S_1/R_O}}$	$Q_{q_{i,pes \to S_1/R_O}}$	$Q_{q_{i,pes \to S_2/R_O}}$	$Q_{q_{i,S_1 \leftrightarrow S_2}}$
α					
β					
x					

NOM : **DR1**

7°) Ecriture des équations

$L_{x,E/Ro} \longrightarrow$ ______________________________

$L_{\alpha,E/Ro} \longrightarrow$ ______________________________

$L_{\beta,E/Ro} \longrightarrow$ ______________________________

8°) Vérification (sur feuille de copie)

9°) Equilibres paramétriques

____

____

10°) Equations à linéariser sous forme littérale :

$Lx_{,E/Ro\ \text{linéarisée}} \longrightarrow$ ______________________________

$L\alpha_{,E/Ro\ \text{linéarisée}} \longrightarrow$ ______________________________

11°) Equations linéarisées sous forme numérique :

$Lx_{,E/Ro\ \text{linéarisée}} \longrightarrow$ ______________________________

$L\alpha_{,E/Ro\ \text{linéarisée}} \longrightarrow$ ______________________________

12°) Ecriture matricielle (sous forme numérique) :

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_x \\ \ddot{\varepsilon}_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{Cm} \end{bmatrix}$$

Noms des termes de couplage : ______________________________

Les termes de couplage négligeables : ______________________________

Réécriture des équations numériques linéarisées simplifiées :

$Lx_{,E/Ro\ \text{linéarisée\_simplifiée}} \longrightarrow$ ______________________________

$L\alpha_{,E/Ro\ \text{linéarisée\_simplifiée}} \longrightarrow$ ______________________________

NOM : **DR2**