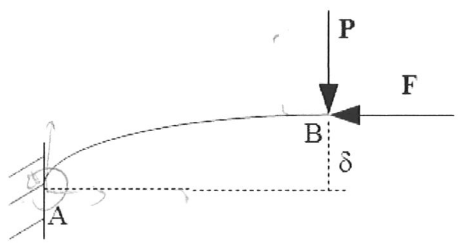
MQ46 Final A2019 - 2 heures

calculatrice non autorisée

EXERCICE 1 et 2 SUR COPIE 1 et EXERCICE 3 et 4 COPIE 2

Exercice 1 : Flambage - 6 points

Soit la poutre AB de longueur L, encastrée en A et soumise en son extrémité B à un effort normal F et à un effort tranchant P.
La poutre a un moment quadratique I_{Gz} et un module d'Young E, supposés constants.
On note δ la flèche du point B.



1. Donner le degré d'hyperstatisme de cette structure.

2. Donner l'expression du moment fléchissant le long de la poutre.

3. Montrer que l'expression de la flèche tout le long de la poutre s'écrit :

$$y(x) = \left(\frac{PL}{F} - \delta\right)\cos(\omega x) - \frac{P}{F\omega}\sin(\omega x) - \frac{P}{F}(L-x) + \delta \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{F}{EI}$$

4. Utiliser la condition limite $y(L) = \delta$ et montrer que :

$$\delta = -\frac{PL^3}{EI}\left(\frac{\tan(\omega L) - \omega L}{(\omega L)^3}\right) \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{F}{EI}$$

5. Pour $P = 0$, calculer la charge critique correspondante.

6. Pour F petite donc ωL petit, en utilisant un développement limité de la tangente $\tan(\omega L)$ calculer la flèche en B. On rappelle que le DL au voisinage de 0 de $\tan(X)$ est :

$$\tan(X) = X + \frac{1}{3}X^3$$

Exercice 2 : Analyse Limite - ~~6~~ 4 points

Soit une poutre AB, de longueur L et de section circulaire creuse avec un rayon interne $R_i = R$ et un rayon externe $R_e = 2R$. La structure est encastrée en A et subit un moment de torsion M_t au point B. On suppose la structure homogène, isotrope, élastique parfaitement plastique de limite élastique τ_Y

1. Faire un dessin illustrant ce problème.
2. Donner l'expression de la contrainte de torsion en fonction de M_t et de R dans la phase élastique.
3. Donner l'expression du moment de torsion M_Y en début d'écoulement plastique en fonction de τ_Y et de R.
4. Donner l'expression du moment de torsion limite M_L quand toute la structure est entrée en plasticité, en fonction de τ_Y et de R.
5. Calculer la réserve de plasticité soit M_L / M_Y.
6. Compléter la phrase : "La rérve de plasticité d'une poutre de section creuse est plus .... que la rérve de plasticité d'une poutre de section pleine".

Partie 2 : Examen Final MQ46 Jeudi 16 janvier 2020

Exercice 3 : Calcul d'un tourillon d'extrémité.
5 points

On se propose d'étudier un tourillon d'extrémité d'un arbre à cames de moteur thermique. Le tourillon est un élément de guidage (rep. A) en rotation comme schématisé sur les dessins ci-dessous :

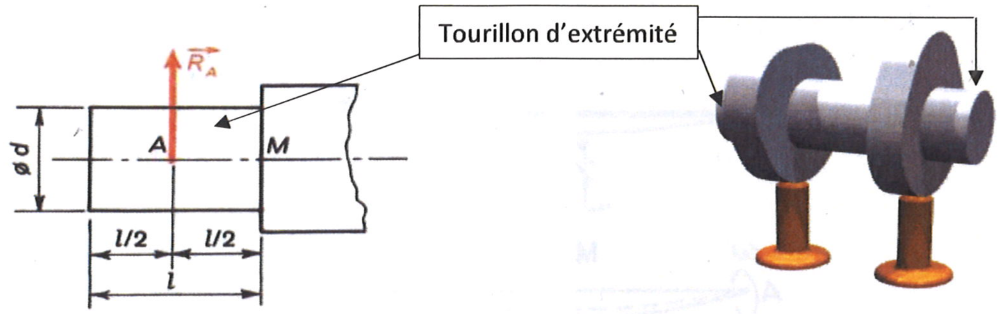


Figure 1: schéma de chargement équivalent

Outre la condition de résistance, on doit aussi s'assurer que les conditions de graissage et de limitation en température sont respectées.

1_ Condition de résistance.
La section dangereuse se situe en M et on admettra que l'action de l'appui $\overrightarrow{R_A}$ est appliquée au milieu de la portée. *(On considérera uniquement le moment fléchissant)*

2_ Condition de graissage.
On écrit que la pression, rapportée à la surface diamétrale ld, est au plus égale à une limite définie à partir de conditions technologiques.

3_ Condition de limitation de température.
On écrit que la quantité de chaleur dégagée par seconde et par m^2 de surface diamétrale ou, ce qui est la même chose, que la puissance absorbée par le frottement par unité de surface diamétrale exprimée en W/m^2 n'excède pas une valeur limite fixée.

Travail demandé :
En tenant compte des 3 conditions (résistance, graissage et limitation de température) : Calculer le diamètre et la portée de ce tourillon d'extrémité en prenant $l = 1.5d$ en condition de fabrication. Les résultats devront être exprimés dans le système international puis en unités usuelles.

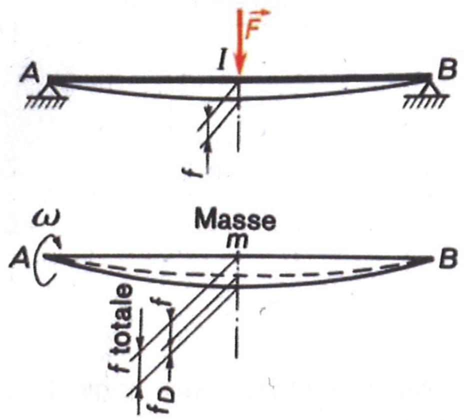
<u>Données numériques :</u>

$$On\ prendra\ pour\ valeur\ du\ Mt\ quadratique:\ I \approx 0.05d^4$$
$$Relation\ liant\ la\ longeur\ de\ portée\ au\ diamétre:\ l = 1.5d$$
$$Réaction\ de\ l'appui:\ R_A = 2000\ N$$
$$Contrainte\ de\ travail\ admissible:\ \sigma_w = 100\ N/mm^2 (à\ convertir\ en\ Pa)$$
$$Pression\ limite:\ p_{limite} = 5\ MPa\ (à\ convertir\ en\ Pa)$$
$$Puissance\ limite:\ P_{limite} = 300000\ W/m^2$$
$$Coefficient\ de\ frottement:\ f = 0.05$$
$$Vitesse\ angulaire\ du\ tourillon:\ \omega = 40\pi\ rd/s$$

Exercice 4 : Evaluation de la vitesse critique d'un arbre en rotation.
5 points

La poutre AB est un arbre de transmission c'est-à-dire qu'elle est animée d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω radians par seconde.

Cet arbre est sollicité par une charge $\vec{F}$, appliquée en son milieu I, qui peut être assimilée à l'action de la pesanteur d'une masse m égale à F/g.



Cet arbre de section constante, supposé initialement au repos, se déforme sous l'action de sa masse et la déformée que nous savons déterminée donne au milieu une flèche maximale statique f proportionnelle à F :

$$\boxed{f = \frac{FL^3}{48EI} = C.F = C.m.g \quad avec\ C = \frac{L^3}{48EI}}$$

La masse m est de ce fait excentrée et, lorsque l'arbre est en mouvement, il en résulte un effet d'inertie E_i , qui provoque une flèche supplémentaire dynamique f_D proportionnelle à E_i.

$$f_D = CE_i$$

Comme $E_i = m\omega^2(f + f_D)$ il vient en remplaçant E_i par f_D/C :

$$\frac{f_D}{C} = m\omega^2(f + f_D)$$

Soit :

$$\boldsymbol{f_D = \frac{Cm\omega^2 f}{1 - Cm\omega^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Travail demandé :

Question 1_ Calcul littéral :

A partir de la formulation (1), trouver l'expression de la vitesse angulaire critique $\omega_{critique}$. Vous montrerez que $\omega_{critique}$ ne dépend que de la flèche statique f et de l'accélération de la pesanteur g.

Question 2_Application numérique :

Calculer la valeur approchée de la vitesse critique de l'arbre pour une flèche statique au milieu de l'arbre $(L/2)$ de 0.014 mm et $g = 9.81\ m.s^{-2}$.
On exprimera le résultat en tr/mn.