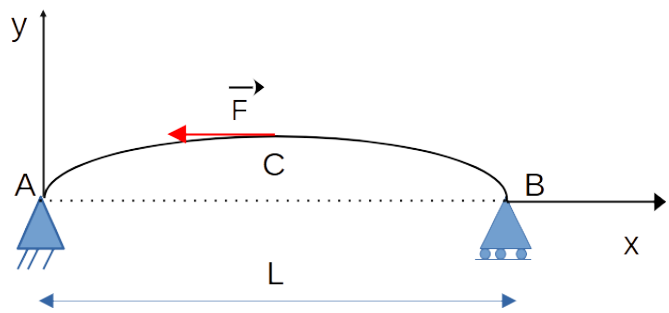
# MQ46 - FINAL A2023
# Calculatrice autorisée - Aucun document autorisé

## Exercice 1 : Flambage d'une poutre : 8 points

Soit une poutre $AB$, articulée en $A$ et en appui simple en $B$ de longueur $L$. On applique une force horizontale d'intensité $F$ en son milieu noté $C$. Les caractéristiques mécanique et géométrique de la poutre sont $E$ et $I$.




On choisit l'origine du repère au point $A$ et les coordonnées des points sont :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}L\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}L/2\\v_C\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad v_C \ : \text{inconnue} \tag{1}$$

1. **(0.25 pt)** Donner le dégré d'hyperstatimsme de ce problème.
2. **(0.75 pt)** Calculer les réactions d'appui.
3. Entourer la bonne réponse dans les phrases suivantes :
   (a) **(0.25 pt)** Le tronçon $AC$ travaille en :
   (a) flexion (b) traction (c) compression (d) torsion
   (b) **(0.25 pt)** Le tronçon $CB$ travaille en :
   (a) flexion (b) traction (c) compression (d) torsion
4. **(0.75 pt)** Montrer que l'expression du moment fléchissant dans le tronçon $AC$ est :
$$M_{f1} = \frac{F\,v_C}{L}\,x - Fy \tag{2}$$
   Pourquoi $M_{f1}$ est fonction de $x$ et $y$ ?
5. **(0.75 pt)** Montrer que l'expression du moment fléchissant dans le tronçon $CB$ est :
$$M_{f2} = -\frac{F\,v_C}{L}(L - x) \tag{3}$$
   Pourquoi $M_f$ n'est fonction que de $x$ ?
6. **(1.5 pt)** Donner l'expression de la flèche dans le tronçon $AC$.
7. **(1.5 pt)** Donner l'expression de la flèche dans le tronçon $CB$.

8. **(0.25 pt)** Combien y a t-il de constantes à déterminer ?
9. **(0.75 pt)** Ecrire les conditions limites pour déterminer ces inconnues.
10. **(0.5 pt)** L'écriture du système linéaire pour trouver ces inconnues entraîne que le déterminant du système doit être nul. L'expression du déterminant est :

$$det\Sigma = \sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)\left(\frac{-3}{2} + \frac{\omega^2 L^2}{24}\right) - \frac{\omega L}{4}\cos\left(\frac{\omega L}{2}\right) = 0 \tag{4}$$

On rappelle que les solutions de ce déterminant permettent de trouver les charges critiques selon le mode d'Euler.

Montrer que la solution de ce déterminant revient à résoudre, en précisant la valeur de $X$ :

$$\tan(X) = \frac{3X}{X^2 - 9} \tag{5}$$

11. **(0.5 pt)** La première solution de (5) est $X \simeq 2.16$. En déduire la valeur de la première charge critique.

**Exercice 2 : Calcul des contraintes équivalentes : 2 points**

Soit une structure en 2D qui subit un effort de torsion. La limite élastique en torsion est notée $\tau_Y$. On donne la matrice des contraintes dans la base $(\vec{x}; \vec{y})$ :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

1. **(0.5 pt)** Calculer les contraintes principales de la matrice des contraintes.
2. **(0.5 pt)** Donner l'expression de la contrainte de Von Mises en fonction de $\tau$.
3. **(0.5 pt)** Donner l'expression de la contrainte de Tresca en fonction de $\tau$.
4. **(0.5 pt)** Donner la valeur de $\tau$ pour que la structure reste dans le domaine élastique avec les critères de Von Mises et Tresca.