MQ46 Médian A2022
lundi 10 Novembre 2022 - durée 1 h 30

aucun document autorisé - calculatrice non autorisée

Exercice 1 : Théorème de superposition - 5.5 points

Soit la poutre AB, de longueur L , encastrée en A et en appui ressort au point B de raideur k. La réaction du ressort sera notée R_B.

Cette structure est soumise à une charge répartie linéique triangulaire d'intensité $p(x) = \dfrac{ax}{L}$ sur toute la longueur de la poutre, où a est une constante. On suppose la structure élastique de module d'Young E constant et de moment quadratique constant I_{Gz}.

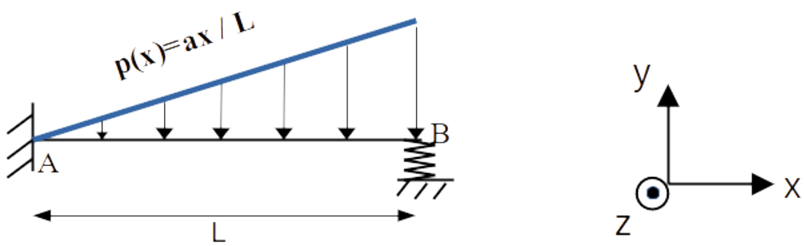


FIGURE 1 – poutre encastrée et appui ressort - répartition triangulaire

Rappel :

Le calcul du moment équivalent à la répartition p entre un point G d'abscisse x et B, par rapport à G est donné par :

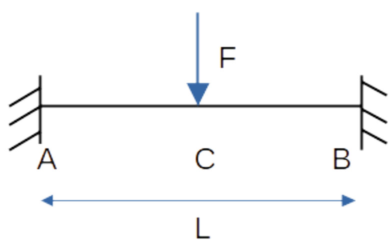
$$\overrightarrow{\mathcal{M}(p)}_{/G} = \int_x^L \overrightarrow{GM} \wedge \vec{p}(u)\, du \qquad \text{avec} \qquad M = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. Donner le degré d'hyperstatisme de cette structure. (0.25 pt)
2. Dessiner les deux problèmes à résoudre et écrire l'équation de compatibilité. (1 pt)
3. Résoudre chaque problème. (3.5 pt)
4. En déduire que la réaction au point B est $R_B = \dfrac{11akL^4}{40(kL^3 + 3EI)}$. (0.5 pt)
5. Vérifier les unités de l'expression de R_B. (0.25 pt)

Exercice 2 : Poutre bi encastrée - Méthodes énergétiques - 9 points

Soit AB une poutre de longueur L, encastrée en A et en B. Elle supporte une charge verticale F en son milieu, noté C.



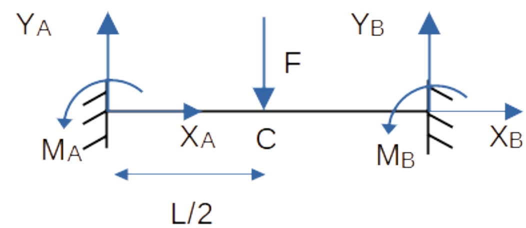


FIGURE 2 – poutre bi encastrée

1. Donner le degré d'hyperstatisme de cette structure. (0.25 pt)

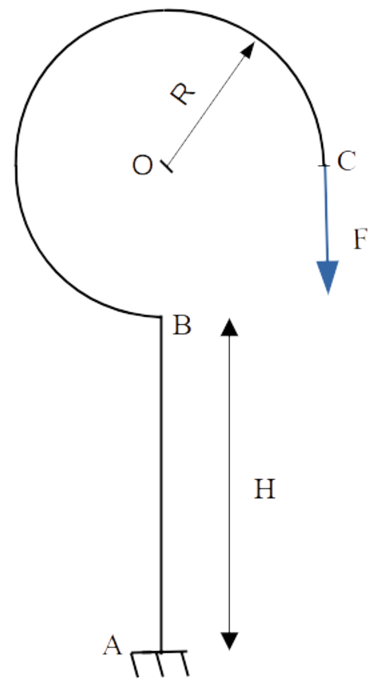
   Dans la suite de l'exercice, pour des raisons mécaniques, on suppose que $X_A = 0$ et $X_B = 0$. Le problème devient un problème hyperstatique de degré 2.
2. Préciser vos inconnues hyperstatiques. (0.5 pt)
3. Combien y-a-t-il de tronçons ? Calculer alors le moment fléchissant dans chaque tronçon. (2 pt)
4. Donner l'expression de l'énergie de déformation si on ne considère que l'énergie due au moment fléchissant. (0.5 pt)
5. Quelle méthode énergétique faut-il utiliser ? (0.25 pt)
6. Combien de fois faut-il utiliser cette méthode énergétique ? (0.5 pt)
7. Donner le système linéaire à résoudre pour déterminer les deux inconnues hyperstatiques. (2 pt)
8. Calculer les réactions d'appui. (1 pt)
9. Donner l'expression du moment fléchissant maximal. (1 pt)
10. Calculer la flèche au point C. (1 pt)

Rappel : l'expression de l'énergie de déformation due à la flexion est :

$$W = \frac{1}{2EI} \int_{AB} M_f^2 \, dx$$

Exercice 3 : Poutre circulaire - 5.5 points

La structure ABC est composée d'une poutre circulaire CB de centre O et de rayon R, et d'une poutre verticale BA de longueur H. Elle est encastrée en A et subit une force verticale F au point C. On suppose la structure élastique isotrope, de module d'Young E et de moment quadratique I. L'angle d'enroulement de cette poutre circulaire est $3\pi/2$.



Dans cet exercice on ne considère dans le calcul de l'énergie de déformation de la poutre que les efforts dus à la flexion.

Rappel : Linéarisation des fonctions trigonométriques :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)) \; ; \; \sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta)) \quad ; \quad \cos(\theta)\,\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\,\theta)$$

1. On souhaite connaître les déplacements horizontal et vertical et la rotation du point C. Que doit-on introduire ? (0.5 pt)
2. Donner alors l'expression de M_f tout le long de la poutre. (2 pt)
3. Calculer le déplacement horizontal de C. (1 pt)
4. Calculer le déplacement vertical de C. (1 pt)
5. Calculer la rotation du point C. (1 pt)