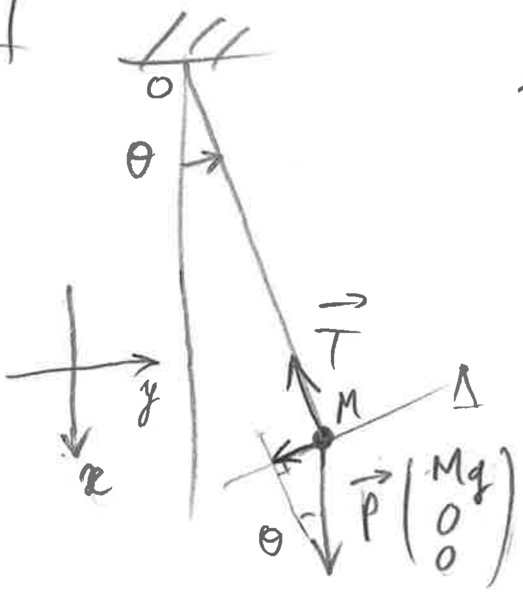
25/11/14

MQ72 - Examen

Corrigé

1.1



2 effets $\begin{cases} \text{le poids } \vec{P} \\ \text{la tension } \vec{T} \text{ de la barre OM} \end{cases}$

En projection sur l'axe $\Delta \perp OM$: $-Mg\sin\theta$

$\Sigma F = M\gamma_\theta$ dans cette direction,

$\Sigma F = -Mg\sin\theta$

$\gamma_\theta = L\theta''$

$ML\theta'' + Mg\sin\theta = 0$ avec $\sin\theta \simeq \theta$

$$\boxed{\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

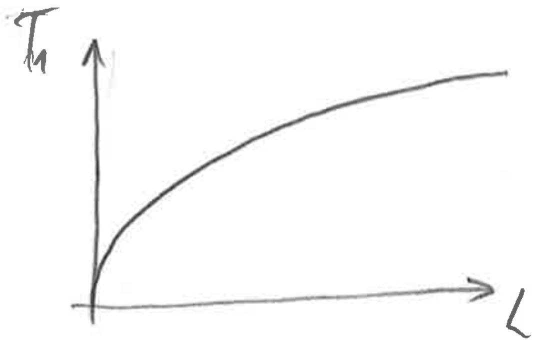
1.2 Solution : $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

1.3 Si $L \to +\infty$ $T_1 \to +\infty$

Si $L \to 0$ $T_1 \to 0$

($L = 0$ n'est pas réalisable physiquement, car la masse ne peut pas être mathématiquement ponctuelle)



$\boxed{2.1}$ $\boxed{\{V\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \theta' & 0 \end{Bmatrix}}$ Le point O est immobile.

$\boxed{2.2}$ $\begin{cases} \vec{S_c} = M\vec{V_G} \\ \vec{\sigma_o} = I_{Oz}\theta'\vec{k} \end{cases}$ $\vec{V_G}$: vitesse de G, de module $L\dot\theta$ et dirigée tangentiellement.

$$\vec{V_G} = L\theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou : $\vec{OG} = L \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_G} = \dfrac{d\vec{OG}}{dt}$

$$\boxed{\{C\}_O = \begin{Bmatrix} -ML\theta'\sin\theta & 0 \\ ML\theta'\cos\theta & 0 \\ 0 & I_{Oz}\theta' \end{Bmatrix}}$$

$\boxed{2.3}$ $\begin{cases} \vec{S_d} = M\dfrac{d\vec{V_G}}{dt} \\ \vec{\delta_o} = I_{Oz}\theta''\vec{k} \end{cases}$

$$\boxed{\{D\}_O = \begin{Bmatrix} -ML(\theta''\sin\theta + \theta'^2\cos\theta & 0 \\ ML(\theta''\cos\theta - \theta'^2\sin\theta & 0 \\ 0 & I_{Oz}\theta'' \end{Bmatrix}}$$

$\boxed{2.4}$ Efforts appliqués : $\begin{cases} \text{Le poids } \vec{P} \text{ en G.} \\ \text{La réaction du pivot } \vec{R} \text{ en O.} \end{cases}$

$\vec{P} = \begin{pmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{R}\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\{T_{\to \text{Solide}}\}_O = \begin{Bmatrix} Mg + R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & -MgL\sin\theta \end{Bmatrix}}$

2.5 $\{\mathcal{D}\}_O = \{T_{\rightarrow \text{solide}}\}_O$

Seule l'égalité des moments est utile pour déterminer l'équation du mouvement.
Les autres équations permettraient de calculer R_x et R_y

$$I_{Oz}\,\theta'' = -MgL\sin\theta$$

Si $\sin\theta \simeq \theta$ $\boxed{\theta'' + \dfrac{MgL}{I_{Oz}}\,\theta = 0}$

2.6 Solution : $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{MgL}{I_{Oz}}}$

$$\boxed{T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Oz}}{MgL}}}$$

3.1 $m = \iiint_{\text{sphère}} \rho\, dv$

Coordonnées sphériques : $dv = r^2\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$m = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr$$

$$m = \rho \times 2 \times 2\pi \times \frac{R^3}{3}$$

$$\boxed{m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3}$$

3.2 $I_{\text{Centre}\,S} = \iiint_{\text{sphère}} \rho\, r^2\, dv$

$$I_{\text{Centre}\,S} = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4\, dr$$

$$I_{\text{Centre}\,S} = \rho \times 2 \times 2\pi \times \frac{R^5}{5}$$

$$I_{\text{Centre}\,S} = \frac{4}{5}\pi\rho R^5$$

ρ s'exprime en fonction de la masse m : $\rho = \dfrac{3m}{4\pi R^3}$

$$\boxed{I_{\text{Centre}\,S} = \frac{3}{5} m R^2}$$

3.3 Compte tenu des symétries de la sphère : $I_{\text{Plan}\,S} = \frac{1}{3} I_{\text{Centre}\,S}$

$$\boxed{I_{\text{Plan}\,S} = \frac{1}{5} m R^2}$$

3.4 Compte tenu des symétries : $I_{\text{Axe}\,S} = 2\, I_{\text{Plan}\,S}$

$$\boxed{I_{\text{Axe}\,S} = \frac{2}{5} m R^2}$$

3.5 Théorème de Huygens pour chacune des sphères.

$$I_{Gz} = 2\left(I_{\text{Axe}\,S} + mR^2\right)$$

$$\boxed{I_{Gz} = \frac{14}{5} m R^2}$$

4.1 Huygens : $I_{O_3} = I_{G_3} + 2m L^2$

$$\boxed{I_{O_3} = 2m\left(\frac{7}{5}R^2 + L^2\right)}$$

$$\boxed{T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{7R^2+5L^2}{5Lg}}}$$

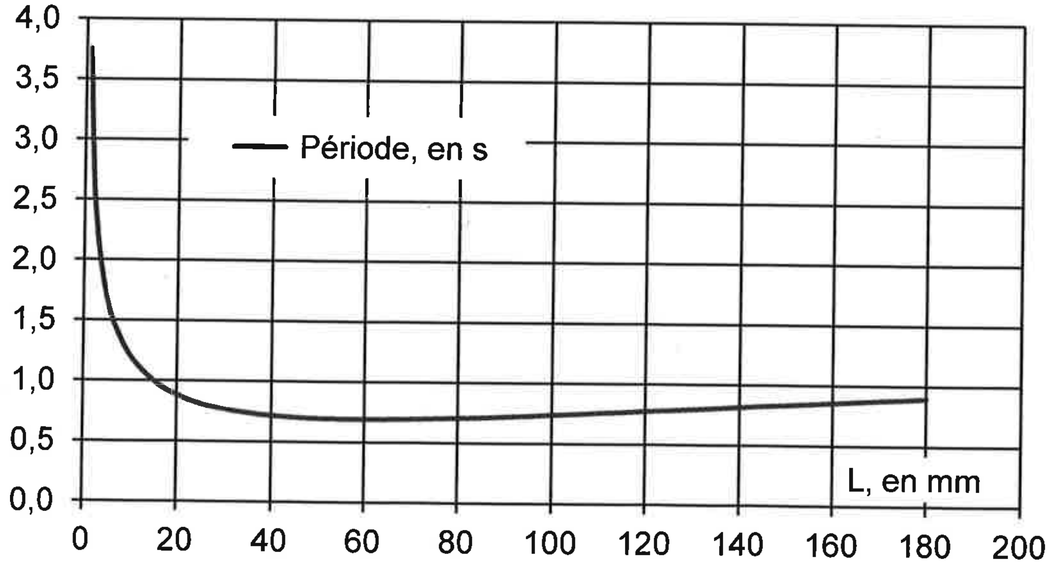
4.2 Il ne se passe rien, le solide reste immobile, l'équilibre est indifférent,

Une fois le solide libéré : $\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{/O} = \vec{0} \end{cases}$

D'après l'expression de T_3 : si $L \to +\infty$, $T_3 \to +\infty$

Période ∞ = immobilité.

4.3



Si $L \to +\infty$, $T_3 \to +\infty$ (le comportement se rapproche de celui du pendule simple)

Si $L \to 0$, $T_3 \to +\infty$

$\boxed{4.4}$ Voir le graphique

T_3 minimale si $\frac{dT_3}{dL} = 0$, ou si $\frac{d}{dL}\left(\frac{7R^2+5L^2}{L}\right) = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left[10L_0 \times L_0 - (7R^2 + 5L_0^2)\right] = 0$$

$$5L_0^2 - 7R^2 = 0$$

$$\boxed{L_0 = R\sqrt{\frac{7}{5}}}$$

$\boxed{4.5}$ $T_{3\,min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{7R^2 + 5R^2\frac{7}{5}}{5gR\sqrt{\frac{7}{5}}}}$

$$\boxed{T_{3\,min} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}\sqrt[4]{\frac{7}{5}}}$$

$\boxed{4.6}$ $L_0 = 59{,}2$ mm

$T_{3\,min} = 0{,}690$ s