MQ72 - Automne 2014
Sujet de l'examen final
26/11/2014

Durée : 2 h – 4 exercices indépendants

Documents autorisés – 1 point par question

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Le pendule simple

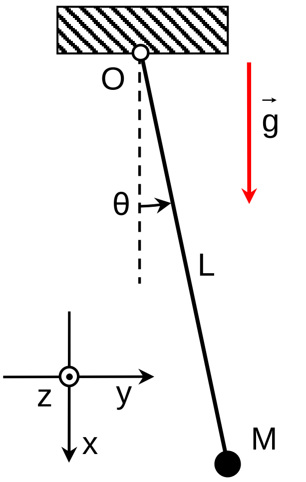

Fig. 1 : Le pendule simple.

Une masse M, considérée comme ponctuelle, est fixée à l'extrémité d'une barre OM sans masse, infiniment rigide, de longueur L, dont l'autre extrémité, en O, est reliée à un support fixe par un pivot parfait d'axe horizontal (Fig. 1).

La masse M est écartée de sa position d'équilibre, puis laissée libre, soumise à l'accélération de la pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Sa position instantanée est repérée par l'angle θ entre la verticale du pivot et la barre.

Il n'y a aucune dissipation d'énergie au niveau du pivot, du gaz ambiant, ou ailleurs.

1.1. A l'aide d'un croquis, expliquer quels sont les efforts qui agissent sur la masse M.
Monter que le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire une équation différentielle liant l'angle θ et sa dérivée seconde θ''.
Ecrire cette équation différentielle en la simplifiant, dans le cas où l'angle θ est suffisamment petit pour pouvoir être assimilé à son sinus.

1.2. Donner la solution de l'équation trouvée en réponse à la question 1.1, constater que le mouvement libre de la masse est un mouvement périodique et exprimer sa période T_1 en fonction des paramètres connus L et g.

1.3. Comment évolue T_1 si la longueur L tend vers l'infini ?
Quelle est sa valeur (théorique) si la longueur L est nulle ?
Tracer schématiquement le graphique des variations de T_1 en fonction de L.

MQ72 - Automne 2014
Sujet de l'examen final
26/11/2014

2. Le solide oscillant

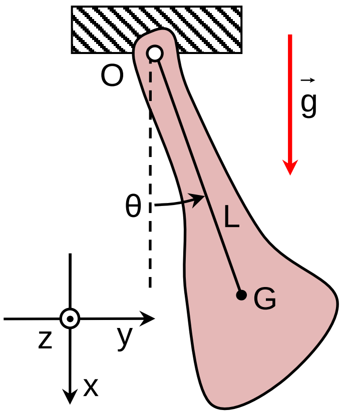

Fig. 2 : Le solide oscillant.

En l'un de ses point, noté O, un solide est reliée à un support fixe par un pivot parfait d'axe horizontal (Fig. 2).
Le solide possède une masse M, un moment d'inertie I_{Oz} par rapport à l'axe du pivot, et un centre de gravité G, situé à une distance L de l'axe du pivot.
Le solide est écarté de sa position d'équilibre, puis laissé libre, soumis à l'accélération de la pesanteur terrestre $\vec{g}$.
Sa position instantanée est repérée par l'angle θ entre la verticale du pivot et la ligne OG.
Il n'y a aucune dissipation d'énergie au niveau du pivot, du gaz ambiant, ou ailleurs.

2.1. θ' étant la vitesse angulaire du solide, exprimer son torseur cinématique en O (6 composantes).

2.2. Exprimer le torseur cinétique du solide en O (6 composantes).

2.3. Exprimer le torseur dynamique du solide en O (6 composantes).

2.4. Exprimer en O le torseur des efforts appliqués au solide (6 composantes).

2.5. Monter que, à partir des résultats des questions 2.3 et 2.4, le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire une équation différentielle liant l'angle θ et sa dérivée seconde θ''.
Ecrire cette équation différentielle en la simplifiant, dans le cas où l'angle θ est suffisamment petit pour pouvoir être assimilé à son sinus.

2.6. Donner la solution de l'équation trouvée en réponse à la question 2.5, constater que le mouvement libre du solide est un mouvement périodique et exprimer sa période T_2 en fonction des paramètres connus M, L, I_{Oz} et g.

3. Moments d'inertie

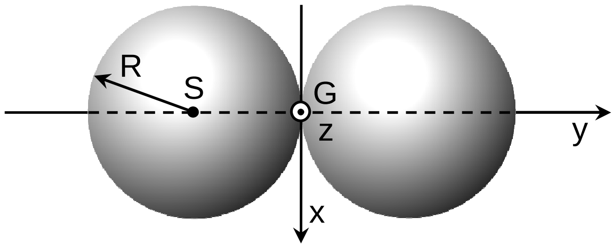

Fig. 3 : Le solide constitué de 2 sphères.

Soit un solide constitué de 2 sphères identiques, de même rayon R, solidaires, tangentes en un point G (Fig. 3).
Le matériau des sphères est homogène, de masse volumique ρ.

3.1. A partir de la formule du cours, trouver l'expression de la masse m d'une sphère unique.

3.2. A partir de la formule du cours, trouver l'expression du moment d'inertie $I_{CentreS}$ d'une sphère unique, par rapport à son centre S, en fonction de sa masse m et du rayon R.

3.3. En utilisant le résultat de la question 3.2, donner l'expression du moment d'inertie I_{PlanS} d'une sphère unique, par rapport à un plan contenant son centre S.

3.4. En utilisant le résultat de la question 3.3, donner l'expression du moment d'inertie I_{AxeS} d'une sphère unique, par rapport à un axe passant par son centre S.

3.5. En utilisant le résultat de la question 3.4, donner l'expression du moment d'inertie I_{Gz} du solide complet (constitué des 2 sphères), par rapport à l'axe Gz.
Cette expression fera apparaître le rayon R et m, la masse d'une seule sphère.

MQ72 - Automne 2014
Sujet de l'examen final
26/11/2014

4. Oscillations de 2 sphères solidaires

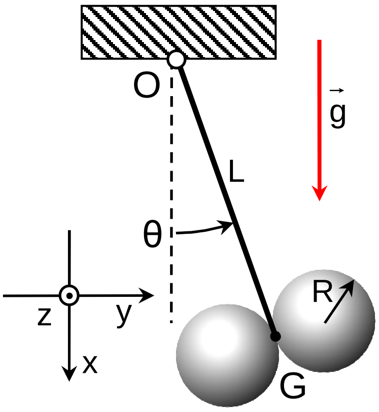

Fig. 4 : Le pendule à 2 sphères.

Un solide constitué de 2 sphères identiques, chacune de masse m et de rayon R, est fixé, en son centre de gravité G, à l'extrémité d'une barre OG sans masse, infiniment rigide, de longueur L.

L'autre extrémité de la barre, en O, est reliée à un support fixe par un pivot parfait d'axe horizontal (Fig. 4).

Le moment d'inertie de ce solide, par rapport à l'axe Gz, est donné par la formule $I_{Gz} = \frac{14}{5}\, m\, R^2$.

Le solide, initialement écarté de sa position d'équilibre, oscille librement et de façon permanente, soumis uniquement à l'accélération de la pesanteur terrestre $\vec{g}$, en l'absence supposée de toute perte d'énergie.

La période de ses oscillations est donnée par la formule $T_3 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{I_{Oz}}{2\, m\, L g}}$ où I_{Oz} est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz.

4.1. Donner l'expression du moment d'inertie I_{Oz} en fonction de m, R et L, ce fait apparaître la période T_3 comme une fonction de L.

4.2. Que se passe-t-il si L = 0 (le point G est sur l'axe du pivot) et que le solide est écarté d'une position d'équilibre ?
Expliquer pourquoi cela est cohérent avec l'évolution de T_3 lorsque L tend vers 0.

4.3. Tracer schématiquement le graphique des variations de T_3 en fonction de L, en mettant en évidence les évolutions de T_3 lorsque L tend vers l'infini et vers 0.

4.4. Constater qu'il existe une valeur L_0 de L pour laquelle T_3 passe par un minimum. Donner l'expression de cette longueur L_0 en fonction de R uniquement.

4.5. Calculer la valeur minimale T_{3min} de T_3, obtenue pour la longueur L_0.

4.6. Calculer numériquement L_0 et T_{3min} pour R = 50 mm et g = 9,81 m/s^2.