MT 12 Final Automne 05

Mardi 17 janvier 2006

Matériel autorisé: une feuille aide-mémoire A4 recto

Les deux parties sont à rédiger sur deux copies séparées

I. Première partie (2 + 6 + 4 points)

1°) Soit l'équation différentielle $4y'' + 4y' + 17y = 0$.

a) Déterminer la solution générale sur R.

b) Chercher la solution f vérifiant les conditions initiales : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

c) Tracer sommairement (on ne demande pas l'étude des variations) la courbe représentative de f.

2°) On considère les équations différentielles (E_g) $y'' + 3y' + 2y = g(x)$ où g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

a) Résoudre sur R l'équation (E_0) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

b) En déduire la résolution des équations :

(E_1) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 6x + 4$ et (E_2) $y'' + 3y' + 2y = (x+4)e^{-x}$

c) Intégrer par parties $\int \frac{1}{x} e^x \, dx$, et en déduire une primitive de $\int \frac{x-1}{x^2} e^x \, dx$

d) Résoudre sur]0, +∞[l'équation (E_3) $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

3°) Soit la fonction f définie par : $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \end{array}$, dont la représentation graphique est une surface (S) dans R^3.

a) Calculer les dérivées partielles de f.

b) Calculer l'équation au plan tangent à la surface (S) au point A(2, +1, +3)

c) Déterminer les points critiques, c'est-à-dire où il pourrait y avoir un maximum ou un minimum.

d) Faire une étude plus détaillée en ces points pour déterminer s'il existe un extremum.

Remarque pour les distraits : n'oubliez pas de tourner la page !

II. Deuxième partie (3 + 5 + 2 + 2 points) **à rendre sur une autre copie**

1°) Soit un endomorphisme f de E = $\mathbb{R}^3$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique B.

a) Déterminer les dimensions et des bases de Im(f) et de Ker(f).

b) A-t-on $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$?

c) Soit le vecteur $u = (2, -1, 0)$. Montrer que u s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément u_1 de Im(f) et d'un élément u_0 de Ker(f). Déterminer deux éléments u_1 et u_0 convenables.

2°) On considère l'espace vectoriel E = $\mathbb{R}^3$, muni de la base $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ et l'endomorphisme f de E défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (2x + y + z,\ y - z,\ x + y)$

a) Écrire la matrice M de f dans B.

b) Réduire, si, possible, la matrice M à la forme diagonale (= déterminer : les valeurs et vecteurs propres, la matrice de passage P et sa matrice inverse). Les valeurs propres seront classées par ordre croissant et la deuxième coordonnée des vecteurs propres sera, si possible, égale à 1.

3°) Soit la matrice N définie par $N = \frac{1}{2} M$.

a) Déterminer, <u>sans faire de calculs</u>, les valeurs propres et les vecteurs propres de N.
Calculer $\lim_{n\to\infty} N^n$.

b) Une suite vectorielle $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est définie par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 0{,}5v_n + 0{,}5w_n \\ v_{n+1} = 0{,}5v_n - 0{,}5w_n \\ w_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5v_n \end{cases}$$

Étudier la limite de cette suite quand n tend vers l'infini.

4°) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$ où x, y et z sont des fonctions dérivables de t sur $\mathbb{R}$.

Calculer la solution vérifiant la condition initiale (x(0), y(0), z(0)) = (2, 0, +1).

L'intérêt à croire une chose n'est pas une preuve de l'existence de cette chose.

François-Marie ARROUET (VOLTAIRE) (France 1694 – 1778)

PREMIÈRE PARTIE

1°) a) (E) $4y''+4y'+17y=0$ d'équation caractéristique $4r^2+4r+17=0$

$\Delta = 16-16\times 17 = -16^2 = (16i)^2 \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{2}+2i \quad r_2 = -\frac{1}{2}-2i \in \mathbb{C}$

Solution générale sur $\mathbb{C}$: $y = \lambda e^{-(\frac{1}{2}-2i)x} + \mu e^{-(\frac{1}{2}+2i)x}$ $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$

sur $\mathbb{R}$ $\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R}}$

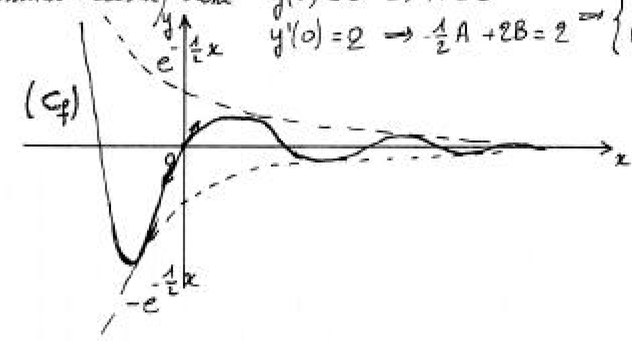
b) $y'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}A\cos 2x - \frac{1}{2}B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right)$ donc $y(0)=0 \Rightarrow A=0$

$y'(0)=2 \Rightarrow -\frac{1}{2}A+2B=2 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}$

Solution avec conditions initiales

$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\sin 2x$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad -e^{-\frac{1}{2}x} \leq f(x) \leq e^{-\frac{1}{2}x}$



2°) a) (E_0) $y''+3y'+2y=0$ équation caractéristique $r^2+3r+2=0$ de solutions $r_1=-1$, $r_2=-2$

Solution générale sur $\mathbb{R}$ $\underline{y = \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$

b) (E_1) on cherche une solution de la forme $y = ax^2+bx+c$, $y' = 2ax+b$, $y''=2a$

dans E_1 : termes en x^2 : $2a=2 \Leftrightarrow a=1$, termes en x : $6a+2b=6 \Rightarrow b=0$ terme en 1 : $2a+3b+2c=4 \Rightarrow c=1$

Sol. particulière $y=x^2+1 \Rightarrow$ solution générale : $\underline{y = \lambda e^{-x}+\mu e^{-2x}+x^2+1 \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$

(E_2) une solution $y=(ax+b)e^{-x}$ ne convient pas

$y=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ convient avec $a=\frac{1}{2}$, $b=3$, $c\in\mathbb{R}$ (on remplace ds (E_2))

Solution générale $\underline{y = \left(\lambda+\frac{1}{2}x^2+3x\right)e^{-x}+\mu e^{-2x} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$

c) $\int \frac{1}{x}e^x dx = \frac{1}{x}e^x - \int -\frac{1}{x^2}e^x dx \Rightarrow \int\frac{1}{x}e^x - \int\frac{1}{x^2}e^x dx = \underline{\int \frac{x-1}{x^2}e^x dx = \frac{1}{x}e^x}$

d) Variation des constantes : on cherche une solution $y=\lambda e^{-x}+\mu e^{-2x}$ avec λ et μ 2× dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$y' = -\lambda e^{-x} - 2\mu e^{-2x} + \lambda' e^{-x} + \mu' e^{-2x}$ + condition L_1 : $\lambda' e^{-x}+\mu' e^{-2x}$

$y'' = \lambda e^{-x} + 4\mu e^{-2x} - \lambda' e^{-x} - 2\mu' e^{-2x}$

En remplaçant dans (E_3) on obtient $-\lambda' e^{-x} - 2\mu' e^{-2x} = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$ (condition L_2)

On cherche donc λ et μ tels que : $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} \lambda' e^{-x}+\mu' e^{-2x}=0 \\ -\lambda' e^{-x}-2\mu' e^{-2x} = \frac{x-1}{x^2}e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1+L_2 \\ L_2+2L_1 \end{matrix}\begin{cases} -\mu' = \frac{x-1}{x^2}e^x \\ \lambda' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \end{cases}$

donc $\mu = -\frac{1}{x}e^x$ et $\lambda = \ln x + \frac{1}{x}$ Solution générale : $\boxed{y = \lambda e^{-x}+\mu e^{-2x} + e^{-x}\ln x \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R}_+^*}$

3°) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-3x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

b) Equation du plan tangent, dirigé par $T_x = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial f}{\partial x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix}$ et $T_y = \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ en A : $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-3 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\underline{\text{Equation du plan : (P)} \quad -9x+3y+z+12=0}$

c) Points critiques : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ -x+x^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,\ y=0 \\ \text{ou} \\ x=1 \quad y=1 \end{cases}$ points O et $B\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$

d) en (0,0) $h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6hk = (h\ \ k)\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ matrice de valeurs propres ± 3 $\Rightarrow \underline{\text{point col en O}}$

en (1,1) $\quad = (h\ \ k)\begin{pmatrix}6 & -3\\-3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$

matrice de valeurs propres $\lambda_1 = 3>0$ et $\lambda_2 = 9>0$ $\Rightarrow \underline{\text{minimum en B}}$

DEUXIÈME PARTIE

1°) f de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

a) $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_2-C_1 \quad C_3-2C_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & +2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{2 = \dim \operatorname{Im} f}$

$\Rightarrow \underline{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$

$f(e_1)$ et $f(e_2)$ indépendants et $\in \operatorname{Im} f \Rightarrow \underline{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = y \end{cases}$ donc $\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$

b) $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) = rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & +2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = 3$

donc $\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E \Rightarrow \underline{\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E}$

c) $u = (2, -1, 0)$

Comme $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$, $\forall u \in E \; \exists! u_0 \in \operatorname{Ker} f \; \exists! u_1 \in \operatorname{Im} f \; / \; u = u_0 + u_1$ (décomposition unique)

$(2, -1, 0) = \underbrace{x(2,0,1) + y(1,1,1)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{z(-1,1,1)}_{\in \operatorname{Ker} f} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ y + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$= \underline{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = u_1 + u_0}$

2°) Matrice de f : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ (tiens ! comme par hasard)

b) Valeurs propres : solutions de $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \underline{\text{Valeurs propres } \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2}$

Sous-espaces propres : $V_0 = \operatorname{Ker} f$ de base $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, V_1 de base $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, V_2 de base $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to$ base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$

matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de matrice inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det P} {}^t\mathrm{Com}\, P$

3°) $N = \frac{1}{2} M$. Si $u \neq 0$ vecteur propre associé à λ $Mu = \lambda u \Rightarrow Nu = \frac{1}{2}\lambda u$

donc M et N ont les mêmes vecteurs propres et valeurs propres de $N = \frac{1}{2}$ valeurs propres de M

donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} N P \Leftrightarrow N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $N^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$\lim_{n\to\infty} N^n = \lim_{n\to\infty} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} N^n}$

4°) Écriture matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et changement de base $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = MP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = P^{-1}MP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X' = 0 \\ Y' = Y \\ Z' = 2Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = C_1 \\ Y = C_2 e^t \\ Z = C_3 e^{2t} \end{cases}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 e^t - 3C_3 e^{2t} \\ C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t} \\ C_1 \qquad - C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$

Condition initiale $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 - 3C_3 \\ C_1 + C_2 + C_3 \\ C_1 \qquad - C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Solution} \begin{cases} x(t) = -e^{+t} + 3e^{2t} \\ y(t) = e^t - e^{2t} \\ z(t) = e^{2t} \end{cases} \text{ sur } t \in \mathbb{R}}$$