utbm
université de technologie Belfort-Montbéliard

MT 12 Final Automne 06

Mardi 16 janvier 2007

Matériel autorisé: une feuille aide-mémoire A4 recto

I. Première partie (2 + 7 points)

1°) Soit l'application linéaire f de R^3, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, dans lui-même définie par : $\forall u = (x, y, z) \in E \quad f(u) = (-x + y + z, 3x + y - 3z, x + y - z)$.

a) Déterminer la matrice de f dans la base B.

b) Vérification de la matrice : calculer de deux manières l'image du vecteur (1, −4, +2).

c) Déterminer la dimension, puis une base de Im (f). Même question pour Ker (f).

d) A-t-on $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$?

2°) Soit l'endomorphisme de R^3, de matrice $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base $B = (e_1, e_2, e_3)$, et les sous-espaces $V_1 = \mathrm{Vect}\left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $V_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et la base B'=(f_1, f_2, f_3).

a) Écrire la matrice P de passage entre la base B et la base B'. Calculer P^{-1}.

b) On considère les applications p_1 projection sur V_1 parallèlement à V_2 de matrice P_1 et p_2 projection sur V_2 parallèlement à V_1 de matrice P_2 dans la base B. Écrire la matrice Q_1 de p_1 dans la base B' et calculer P_1.

La projection p_2 a pour matrices $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans B' et $P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans B.

c) Calculer les matrices P_1^n, P_2^n puis P_1P_2 et P_2P_1.

d) Déterminer deux constantes a et b telles que $M = aP_1 + bP_2$.

e) En déduire le calcul de $M^n = (aP_1 + bP_2)^n$.

II. Seconde partie (5 + 4 + 3 points)

1°) Soit l'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 sur R, muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans B.

a) Calculer ses valeurs propres (qui seront classées par ordre croissant) et ses vecteurs propres.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de la forme $B' = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \end{pmatrix} \right\}$.

c) Écrire la matrice de passage P de B à B' et calculer sa matrice inverse.
d) En déduire la diagonalisation de A.

2°) On considère dans R^3 une suite $(U_n)_{n \in N}$ définie par :

$$\forall n \in N,\ U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et les relations } \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(-x_n + y_n + z_n\right) \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(3x_n + y_n - 3z_n\right) \\ z_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(x_n + y_n - z_n\right) \end{cases} \quad \text{et } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire la relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n sous forme matricielle $U_{n+1} = N\,U_n$.
b) Si α est un nombre réel non nul et M une matrice, quelles sont les relations entre les valeurs propres des matrices M et αM. Montrer que M et αM ont les mêmes vecteurs propres.
c) En déduire, sans calculs, les valeurs propres de N, ses vecteurs propres et la matrice de passage.
d) A l'aide de la diagonalisation de la matrice, calculer une relation entre U_n et U_0.
e) En déduire U_n en fonction de n, puis la limite de U_n quand n tend vers l'infini.

3°) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = 3x + y - 3z \\ z' = x + y - z \end{cases}$ où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle t.
a) Écrire le système sous forme matricielle.
b) En déduire la résolution de ce système.

Résultats pouvant être utilisés dans les calculs :

Si vous n'avez pas trouvé la matrice P_1 dans la question Chap. 1.I.2°)b) $P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\forall \alpha \in R \quad \alpha \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a' & \alpha a'' \\ \alpha b & \alpha b' & \alpha b'' \\ \alpha c & \alpha c' & \alpha c'' \end{pmatrix} \text{ et } \det\left(\alpha \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \right) = \alpha^3 \det \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

Il n'y a d'homme complet que celui qui a beaucoup voyagé, qui a changé vingt fois la forme de sa pensée et de sa vie.

Alphonse de LAMARTINE (France 1790 – 1869)

MT12 Final 16 janvier 2007 — CORRIGÉ —

PREMIÈRE PARTIE

1°) a) $M_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $u = (x=1, y=-4, z=2)$ $\quad f(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

$f(u) = (-3, -7, -5)$ en remplaçant x, y, z ds f.

c) $\mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 = \dim \mathrm{Im} f \Leftarrow$ $C_3 = -C_1$, C_1 et C_2 non colinéaires

base de $\mathrm{Im} f = (C_1, C_2) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker} f \iff f(u) = 0 \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $\quad C_1 + C_3 \Rightarrow y = 0$, $\quad C_1 \Rightarrow x = z \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \mathrm{Ker} f = 1 \Rightarrow \underline{E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f}$

2°) a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det P = 3$ et $\mathrm{Com} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

b) p_1 projection sur V_1 de base $f_1, f_2 \rightarrow$ matrice de p_1 ds B' $\quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

matrice de p_1 dans B $\quad Q_1 = P^{-1} P_1 P \Rightarrow P_1 = P Q_1 P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) p_1 est une projection sur V_1 ($\parallel V_2$) donc $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $P_1^2 = P_1 \Rightarrow P_1^n = P_1$ si $n \in \mathbb{N}^*$

de même pour Q_1 $\quad \forall n \geq 1 \ Q_1^n = Q_1$ et pour p_2 $\quad P_2^n = P_2$

$P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ (matrice nulle) par calcul ou par raisonnement (on projette sur V_1 donc $\mathrm{Ker} p_1 = V_2$, puis sur $V_2 \rightarrow$ image $= \vec{0}$)

d) $M = \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{b}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3}(2a + b) = -1 \\ \frac{1}{3}(-a + b) = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

e) $M^n = \left(-P_1 + \frac{1}{2}P_2\right)^n = (-1)^n P_1^n + C_n^1 \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \underbrace{P_1^{n-1} P_2} + \dots + C_n^{n-1} \underbrace{\frac{(-P_1 P_2^{n-1})}{2^{n-1}}}_{=0} + \left(\frac{+1}{2}\right)^n P_2^n = (-1)^n P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n P_2$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

SECONDE PARTIE

1°) a) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -3 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1 \ \ C_3-C_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -4 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(-2-\lambda) \Rightarrow$ Valeurs propres $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$

b) Sous-espaces propres :

$V_{-2} = \{ u \in E / f(u) = -2u \} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{cases} -x + y + z = -2x \\ 3x + y - 3z = -2y \\ x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ \cancel{x + y + z} = 0 \end{cases}$

$V_0 = \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{cases} \dots = 0 \\ \dots = 0 \\ \dots = 0 \end{cases}$

$V_1 = \{$ vecteurs invariants, $f(u) = u \} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{cases} \dots = x \\ \dots = y \\ \dots = z \end{cases}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) donc $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$

2°) a) $U_{n+1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A$ (matrice étudiée au 1°)

b) u vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda \Rightarrow f(u) = \lambda u$

$\Rightarrow \alpha f(u) = f(\alpha u) = \lambda\alpha u \Rightarrow u$ vecteur propre de αM associé à la valeur propre $\alpha\lambda$

donc en passant de M à αM : $\begin{cases} \text{les vecteurs propres ne changent pas} \Rightarrow \text{m̂ matrice de passage} \\ \text{les valeurs} \text{ — sont multipliées par } \alpha. \end{cases}$

c) Valeurs propres de N $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = 0$ et $\mu_3 = -\frac{1}{2}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Voir 1°)

On a donc $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = P^{-1}NP$ et $N = PD'P^{-1}$

d) Alors $U_{n+1} = NU_n$, $U_n = NU_{n-1}$ ... $U_1 = NU_0 \Rightarrow U_n = N^n U_0 = PD'^n P^{-1} U_0$

donc $U_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4(-\frac{1}{2})^n \\ -2 + 4(-\frac{1}{2})^n \\ 4(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$

et $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3°) a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX$ (A matrice étudiée au 1°)

Par le changement de base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ on a $X' = PY'$ et $X = PY$

donc $PY' = APY \Rightarrow Y' = P^{-1}APY = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ $\begin{cases} x'_1 = -2x_1 \\ y'_1 = \cancel{-2y_1}\, 0 \\ z'_1 = z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{-2t} \\ y_1 = C_2 \\ z_1 = C_3 e^{t} \end{cases} = Y$

comme $X = PY$, on a la solution :

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 + C_3 e^{t} \\ y = -C_1 e^{-2t} \quad + C_3 e^{t} \\ z = \quad C_2 + C_3 e^{t} \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } t \in \mathbb{R}$$