Final printemps 2006

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(6 points)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

i) Quelles sont les valeurs propres de A *? Pour quelles valeurs de* a *est-on sûr que* A *est diagonalisable à ce stade ?*

ii) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres ci-dessus. Que peut-on en déduire ?

iii) Diagonaliser ou trigonaliser A *suivant la valeur de* a *(Donner* P *et* D *ou* T *telles que* $A = PDP^{-1}$ *ou* $A = PTP^{-1}$*).*

Exercice 2 *(6 points)* **(NOUVELLE FEUILLE)**

On se propose d'intégrer sur l'intervalle contenu dans $]0, +\infty[$ *le plus grand possible, l'équation différentielle :*

$$(E)\ y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) Déterminer $a \in]0, +\infty[$ *tel que* $y_0(x) = ax$ *soit solution particulière de* (E).

2) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ *(avec* $y_0(x)$ *du 1) transforme l'équation* (E) *en l'équation différentielle*

$$(E_1)\ z'(x) + (6x + \frac{1}{x}).z(x) = 1$$

(ne pas se préoccuper du cas $z(x) = 0$ *et multiplier par* $z(x)^2$ *après avoir fait le changement de fonction).*

3) Intégrer (E_1) *sur* $]0, +\infty[$.

4) Donner toutes les solutions de (E) *définie sur* $]0, +\infty[$.

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 3 *(6 points)* **(NOUVELLE FEUILLE)** *On se propose d'intégrer*

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x} + 2e^x + 2}{e^x(e^{2x} + 2)} dx.$$

1) En utilisant le changement de variables $u = e^x$, montrer que $I = \int_1^2 \frac{u^3+2u+2}{u^2(u^2+2)} du$. *(***justifier soigneusement***)*

2) Décomposer la fraction rationnelle apparaissant ci-dessus en éléments simples.

3) Calculer I.

Exercice 4 *(6 points)* **(NOUVELLE FEUILLE)**

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \in \Omega \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.

3) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}$ et $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$.

QUESTIONS SUPPLÉMENTAIRES *(3 points) :*

4) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\boldsymbol{\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0,0)}$ et $\boldsymbol{\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0,0)}$.