le 19 Juin 2007

UTBM MT12

Final

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(7 points)*

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

1) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}dx$$

grâce au changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$I_n = \int_0^1 x^n.e^x dx \text{ et } J_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx.$$

a - Etablir une récurrence entre I_n *et* I_{n-1}. *En déduire le calcul de* I_n.
b - Montrer que $J_n = I_n$.

3) Soit $a > 0$. *On veut calculer*

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{2x^2 + ax + a^2}{x.(x+a).(x^2+a^2)}dx.$$

Calculer, si possible, $I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x.(x+a)}dx$ *et* $I_2 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}dx$. *En déduire* I.

Exercice 2 *(8 points)* **(NOUVELLE FEUILLE)**

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \Omega \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f *est différentiable sur* Ω *et calculer sa différentielle.*

3) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}$ *et* $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$.

4) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\boldsymbol{\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0,0)}$ *et* $\boldsymbol{\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0,0)}$. *Que peut-on en déduire ?*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 *(7 points)* **(NOUVELLE FEUILLE)**

Soit l'application linéaire donnée, dans la base canonique, par

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Trouver le polynôme caractéristique de f_A*. En déduire ses valeurs propres.*

2) Trouver une base des sous-espaces propres.

3) Trouver une base $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $T := M_{f_A,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$.

En déduire P *telle que* $P.T.P^{-1} = A$.

4) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} y_1'(t) = & -y_1(t) & +3.y_2(t) & +y_3(t) + 1 \\ y_2'(t) = & & y_2(t) & \\ y_3'(t) = & & -2y_2(t) & -y_3(t) \end{cases}$$