le 12 Novembre 2008 UTBM MT12

Final Printemps 2008

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Exercice 1 - *6 points*

Soit l'équation du troisième degré : (e) $y''' - 3y' + 2y = 0$.

1. *En posant* $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$, *écrire cette équation sous la forme* $X' = A.X$ *où* A *est une matrice de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. *Triangulariser la matrice* A *sous la forme* $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $(b \in \mathbb{R})$.
3. *En déduire les solutions de (e).*

Exercice 2 (NOUVELLE FEUILLE) - *7 points*

I - Déterminer les points critiques (dérivées partielles nulles) de la fonction suivante et déterminer si ce sont des maxima locaux, des minima locaux ou des points selle :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 - y^2.$$

II - Soit la fonction f *définie par :*

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2.y + x.y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1 - f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

2 - Quelles sont ses dérivées partielles ?

3 - Les dérivées partielles sont-elles continues ?

4 - Question hors barème (2 points)
Calculer, quand c'est possible, les dérivées secondes suivantes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 (NOUVELLE FEUILLE) - *7 points*

I - Trouver la solution vérifiant $y(1) = 2$ de l'équation

$$(e)\ 2xyy' - 3y^2 + x^2 = 0\ (x, y \geq 0)$$

en posant $z = y^2$.

II - Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définie $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_{2x-1}^{x^2+1} f(t)dt.$$

Déterminer $G'(x)$.

III - a) Montrer que, si $k > 0$, on a $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ et, si $k > 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

b) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2\sqrt{n}$. Déduire de a) que

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 2\sqrt{n} \leq u_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 2\sqrt{n}.$$

c) Déduire de ce qui précède que $\forall n \in \mathbb{N}^*, -2 \leq u_n \leq -1$.

d) Question hors barème (2 points) :
Montrer que u_n est croissante, convergente et que sa limite l vérifie $-2 \leq l \leq -1$.