le 29 Juin 2010 UTBM MT12

Final Printemps 2010

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Exercice 1 (NOUVELLE FEUILLE) - *8 points*

I - Soit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A.

2) Diagonaliser A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$ avec $D := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

3) Calculer P^{-1}.

4) Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 2x - y + z \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 2x + 2z + t \\ \frac{\partial z}{\partial t} = y + z + t \end{cases}$$

où x, y, z sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

II - Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 2y' - 3y = -2\sin(x) - 6\cos(x).$$

Exercice 2 (NOUVELLE FEUILLE) - *7 points*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ *grâce à une intégration par parties.*
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2\,\mathrm{d}x$.
3. *Soit* $\displaystyle F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (a) *Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.*
   (b) *Calculer la dérivée $F'(x)$ pour x appartenant à $\mathcal{D}_F$.*
   (On pensera à introduire G, une primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$)
   (c) *En déduire la valeur de $F(x)$ pour x appartenant à $\mathcal{D}_F$.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 (NOUVELLE FEUILLE) - *8 points*

On souhaite construire une boîte en forme de parallellépipède rectangle de volume 1 et d'aire minimale. Pour une telle boîte, on note x, y et z ses dimensions (longueur, largeur et hauteur).

1. *Avec la condition imposée sur le volume de la boîte, il est possible d'exprimer z en fonction de x et y.*
   Justifier ainsi que l'aire de la boîte est donnée par la fonction de deux variables
   $$A(x,y) = 2xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$$
2. *Limites au bord du domaine.*
   (a) *Dans ce problème, quel est le domaine de définition de A ?*
   (b) *Soit $x_0 \geq 0$ et $y_0 \geq 0$. Déterminer les limites*
   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} A(x,y) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} A(x,y).$$
   (c) *Soit $M \geq 0$. Une étude de fonction permet de montrer que $\forall a > 0,\ a + \frac{M}{a} \geq 2\sqrt{M}$. En déduire que $\forall x, y > 0$,*
   $$A(x,y) \geq 4\sqrt{||(x,y)||_1}.$$
   (On rappelle que $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$.)
   (d) *En déduire que $A(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $||(x,y)||_1$ tend vers $+\infty$.*
3. *Étude des points critiques.*
   (a) *Calculer les dérivées partielles premières de A.*
   (b) *Déterminer le couple (x_0, y_0) tel que*
   $$\frac{\partial A}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$
   (c) *Calculer les dérivées partielles secondes de A.*
   (d) *Écrire la matrice hessienne de A au point (x_0, y_0). Quelle est la nature du point (x_0, y_0) ?*
4. *Représenter le graphe de la fonction A et conclure l'exercice.*