**Mathématiques - MT12**

**Tronc commun**

**Final - Printemps 2014**

Durée de l'épreuve : 90 minutes

*La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.**
**L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.**
**Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.**

**Exercice 1** (10 points) Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \arctan(x^2+y^2) \end{array} \right.$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$ en tout point $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-xy+y^2 \end{array} \right.$

   (a) Montrer que $f$ admet un unique point critique.

   (b) À quel type d'extremum local correspond ce point critique ?

3. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$.

   (a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Montrer que $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, on précisera la valeur de ces dérivées partielles en $(0,0)$).

   (c) $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Changez de copie**

**Exercice 2** (10 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients réels, muni de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

On définit l'application $f$ sur $E$ par : $\forall\, P \in E,\ f(P) = 2X\,P - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que si $P$ appartient à $E$, alors $f(P)$ est de degré au plus 2.
2. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$ (c'est-à-dire une application linéaire de $E$ dans $E$).
3. Écrire la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $E$. Quel est le rang de $A$ ?
   $f$ est-il bijectif ?
4. On pose $Q_1 = (1+X)^2$ , $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1-X)^2$.

   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $E$.

   (b) Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de $Q_1$, $Q_2$ et $Q_3$.

   (c) En déduire la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

   (d) Déterminer une base du noyau de $f$.