utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

MT 12 — Médian Automne 06

Mardi 14 novembre 2006

Matériel autorisé: une feuille aide-mémoire A4 recto

I. Première partie (3,5 + 2,5 + 2 + 3,5 points)

1°) Calculer des primitives des fonctions suivantes, en indiquant sur quels intervalles ces primitives sont définies :

$$I_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad I_2 = \int x\sqrt{x+1}\,dx \qquad I_3 = \int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^2(x-1)}$$

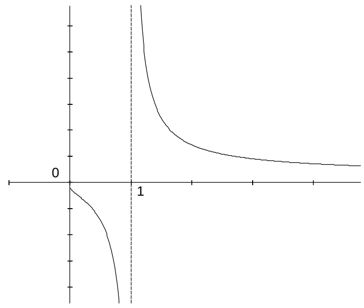
2°) Calculs d'intégrales :

$$I_1 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} e^{-\mathrm{Arcsin}\,x}dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)}$$

3°) Soit, pour $\lambda \in [0,+\infty[$, le domaine plan (D) défini par $\begin{cases} 0 \le x \le \lambda \\ 0 \le y \le e^{-x} \end{cases}$.

On fait tourner ce domaine autour de l'axe (Oy). Calculer, en fonction de λ, le volume $V(\lambda)$ du solide ainsi construit. Quelle est la limite, si elle existe, de $V(\lambda)$ quand λ tend vers l'infini ?

4°) Soit les fonctions f et φ définies par : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \;\; f(t) = \dfrac{1}{\ell n\, t}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \;\; \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ell n\, t}$.



a) Étudier graphiquement le signe de φ, à partir de la représentation graphique de f ci-contre.

b) Calculer la dérivée de φ et dresser son tableau de variations.

c) Étude aux bornes du domaine :

– Pour x>1, montrer que $\varphi(x) \ge \dfrac{x^2 - x}{2\,\ell n\, x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi$.

– Calculer $\lim\limits_{t\to 0_+} f$, et en déduire $\lim\limits_{x\to 0_+} \varphi$.

– Calculer $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{\ell n\, t}$. En déduire $\forall x > 1,\ \exists c \in [x, x^2]$ tel que $\varphi(x) = \dfrac{c-1}{\ell n\, c}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ puis $\lim\limits_{x\to 1} \varphi$.

d) Terminer le tableau de variations et tracer la courbe représentative de φ.

II. Deuxième partie (3,5 + 4 + 2 points)

1°) On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_0) \quad (1-x^2)y' + 2xy = 0 \qquad (E_1) \quad (1-x^2)y' + 2xy = \frac{4x}{x^2-1}.$$

a) Résoudre l'équation (E_0).

b) En déduire la résolution de l'équation (E_1). Existe-t-il une solution continue sur R ?

c) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant f(0) = 0.

2°) Soit les équations différentielles :

$(E_0)\ y''-4y'+4y=0 \qquad (E_1)\ y''-4y'+4y=4x+4 \qquad (E_2)\ y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

a) Résoudre l'équation (E_0).

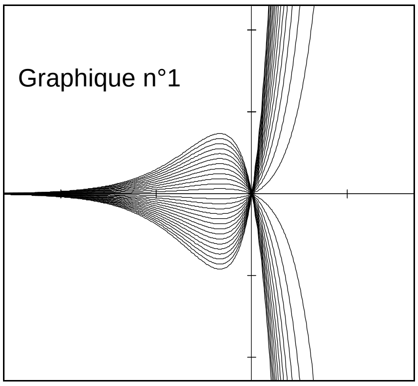
b) Chercher une solution simple de (E_1), et en déduire la solution générale.

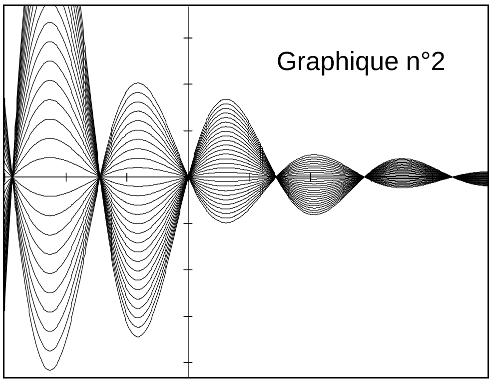
c) Résoudre l'équation (E_2).

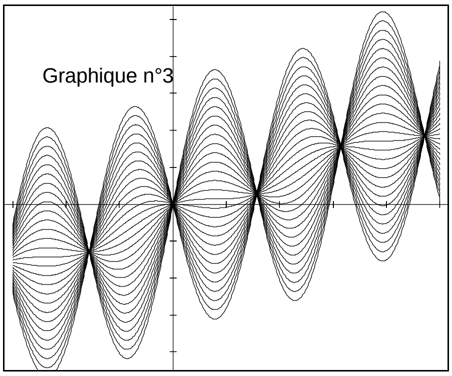
3°) Les graphiques ci-dessous sont les représentations graphiques des solutions d'équations différentielles vérifiant $y(0) = 0$.

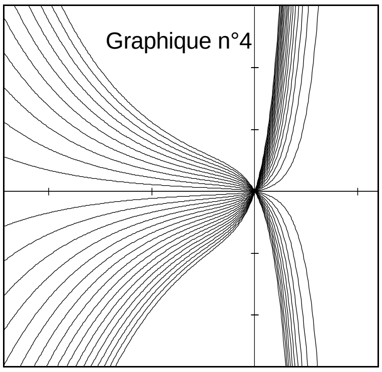
On demande d'associer à chaque équation sa représentation graphique, en expliquant pourquoi..

$(E_1)\ y''-6y'-8y=0 \qquad (E_2)\ y''+y'+5y=0 \qquad (E_3)\ y''-6y'+9y=0 \qquad (E_4)\ y''+4y=2x-1$









Ce qui fait d'un problème un problème, c'est de contenir une contradiction.

José ORTEGA Y GASSET (Espagne 1883 – 1955)

Médian MT12 Mardi 14 novembre 2006 - CORRIGÉ -

PREMIÈRE PARTIE

1°) $I_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ $\quad x = \tan t \quad dx = (1+\tan^2 t)\,dt \Rightarrow I_1 = \int \frac{(1+\tan^2 t)\,dt}{(1+\tan^2 t)^2} = \int \cos^2 t\,dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$

$= \frac{1}{2} t + \frac{\sin t \cos t}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2} \frac{\sin t}{\cos t} \times \cos^2 t = \frac{1}{2} \tan t \, \frac{1}{1+\tan^2 t} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x = \underline{\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{x}{2(1+x^2)}}$ sur $\mathbb{R}$

I_2 (sur $]-1,+\infty[$) $= \int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} dx = \underline{\frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}}} = I_2$

I_3 (sur $]-\infty,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$) $= \int \frac{x^3+2}{x^2(x-1)} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}\right) dx = \underline{x - \frac{2}{x} - 2\ln|x| + 3\ln|x-1|} = I_3$

2°) Calculs d'intégrales :

$I_1 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} e^{-\operatorname{Arcsin} x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, e^{-t} dt = \left[\frac{1}{2}(-\cos t + \sin t) e^{-t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}}} = I_1$

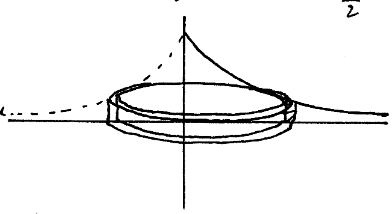
$t = \operatorname{Arcsin} x \Leftrightarrow x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$, $x: \frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow 1 \Leftrightarrow t: \frac{\pi}{4} \nearrow \frac{\pi}{2}$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)} = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-2t\,dt}{t^2(2-t^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t-\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{t+\sqrt{2}}\right) dt$

$= \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln|(t^2-2)|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \underline{\frac{1}{2}\ln 3 = I_2}$

$t = \cos x \quad dt = -\sin x\,dx$, $x: 0 \nearrow \frac{\pi}{4}$, $t: 1 \searrow \frac{\sqrt{2}}{2}$

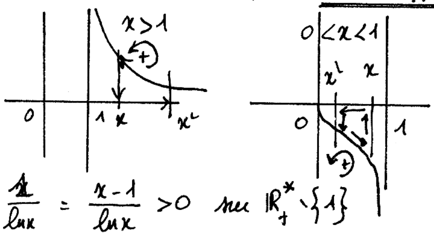
3°) $dV = 2\pi x e^{-x} dx \Rightarrow V = \int_0^{\lambda} 2\pi x e^{-x} dx = 2\pi\left[-x e^{-x}\right]_0^{\lambda} + 2\pi \int_0^{\lambda} e^{-x} dx$



$\Rightarrow V = 2\pi\left(-\lambda e^{-\lambda} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}\right) = \underline{2\pi\left(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}\right) = V(\lambda)}$

$\lim_{\lambda\to\infty} V(\lambda) = 2\pi + \lim_{\lambda\to\infty}\left(-2\pi e^{-\lambda} - 2\pi\lambda e^{-\lambda}\right) = \underline{2\pi = \lim_{\lambda\to\infty} V(\lambda)}$

4°) a) Signe de φ :



Donc dans les deux cas $x > 1$ et $x < 1$, la fonction φ est > 0

b) $\varphi'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

x	0		1		∞
φ'	0	+	‖	+	
φ	0	$\nearrow$	$\ln 2$ ‖ $\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

c) si $x \leq t \leq x^2$, $\frac{1}{2\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$

$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{dt}{2\ln x} \leq \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) \geq \frac{x^2-x}{2\ln x} \Rightarrow \lim_{+\infty} \varphi = +\infty$

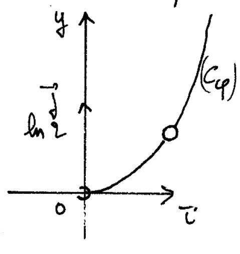
$*$ $\lim_{t\to 0_+} \ln t = -\infty \Rightarrow \lim_{0_+} \frac{1}{\ln t} = 0 \Rightarrow \lim_{0_+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = 0$

$*$ $\lim_{1} \frac{t-1}{\ln t} = 1$. D'après le 2e théorème de la moyenne, $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ continue sur $[x, x^2]$ $(x > 1)$

$\exists c \in [x, x^2]$ / $\varphi(x) = \frac{c-1}{\ln c} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \frac{c-1}{\ln c}\left(\ln(x^2-1) - \ln(x-1)\right)$ $t \longmapsto \frac{1}{t-1}$ positive et intégrable sur $[x, x^2]$

donc $\lim_{x\to 1_+} \varphi = \lim_{1} \ln(x+1) = \ln 2$. même calcul pour $x \to 1_-$ à quelques détails près

Représentation graphique :



DEUXIÈME PARTIE

1°) (E_0) et (E_1) à résoudre sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, +1[$ ou $I_3 =]1, +\infty[$

a) (E_0) $y = 0$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$

si $y \neq 0$ $\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2-1} \rightarrow \ln|y| = \ln|x^2-1| + C \rightarrow \underline{y = k(x^2-1) \quad k \in \mathbb{R}}$. sol. générale de (E_0)

b) On cherche une solution de (E_1) de la forme $y = k(x)(x^2-1)$ avec k dérivable sur I_1, I_2 ou I_3

$y' = k'(x)(x^2-1) + 2x\,k(x)$ et dans (E_1) : $(1-x^2)\left(k'(x)(x^2-1) + \cancel{2x\,k(x)}\right) + \cancel{2x\,k(x)}(x^2-1) = \frac{4x}{x^2-1}$

$k'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^3} \Rightarrow k(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$, on a donc une solution $y = \frac{1}{x^2-1}$

Solution générale de (E_1) sur I_1, I_2 ou I_3 : $\underline{y = k(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1} \quad k \in \mathbb{R}}$

c) $y(0) = 0 \rightarrow 0 = -k - 1 \rightarrow k = -1$ $\quad \underline{y = 1 - x^2 + \frac{1}{x^2-1}}$

$\forall k \in \mathbb{R}$ $y = k(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}$ est discontinue en 1 et -1 (limites infinies) $\rightarrow \nexists$ sol. continue sur $\mathbb{R}$

2°) Résolution de (E_0), (E_1) et (E_2) sur $\mathbb{R}$.

a) (E_0) eq. caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ $\quad r_1 = r_2 = 2 \rightarrow$ $\underline{\text{Sol. générale } y = (\lambda x + \mu)e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

b) (E_1) on cherche une solution $y = ax + b$, $y' = a$, $y'' = 0$, dans (E_1) $-4a + 4(ax+b) = 4x + 4 \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}$

Solution générale : $\underline{y = (\lambda x + \mu)e^{2x} + x + 2 \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

c) On cherche une solution de (E_2) de la forme $y = (\lambda x + \mu)e^{2x}$ où λ et μ sont $2\times$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$y' = (2\lambda x + 2\mu + \lambda' x + \lambda + \mu')e^{2x}$ avec la condition $\lambda' x + \mu' = 0$

$y'' = (4\lambda x + 4\mu + 2\lambda + 2\lambda' x + 2\lambda + 2\mu' + \lambda')e^{2x}$

Dans (E_2) $\quad y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2+1} = \lambda' e^{2x}$, on a donc $\begin{cases} \lambda' x + \mu' = 0 \\ \lambda' = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \text{Arctan}\, x \\ \mu = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$

Solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ $\quad \underline{y = (\lambda x + \mu)e^{2x} + \left[x\,\text{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

3°) (E_2) $\quad \Delta < 0$, racines complexes de partie réelle négative $\Rightarrow$ solutions oscillantes et amorties $\rightarrow G_2$
$\frac{b}{a} < 0$

(E_4) $\quad \Delta = -4 \Rightarrow$ solutions oscillantes + solution particulière du 1er degré $\Rightarrow$ graphique G_3

(E_1) $\quad \Delta > 0$ et $\frac{c}{a} < 0 \rightarrow$ racines réelles de signes contraires $\Rightarrow$ exponentielles $\rightarrow$ graphique G_4

(E_3) $\quad \Delta = 0$, régime critique (max 1 oscillation) $\rightarrow$ graphique G_1