le 12 Novembre 2008 UTBM MT12

Médian Printemps 2008

Calculatrices et documents interdits.

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Exercice 1 - *8 points*

1) Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Démontrer que pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$,

$$\lambda.x = 0 \Longleftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0).$$

2) Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soit G un sous espace vectoriel de F. Montrer que $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3) Déterminer, dans les bases canoniques, la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Peut-on trouver 2 bases distinctes B et B' de $\mathbb{R}_2[X]$ telles que les coordonnées de $P(X) = 2 - X + X^2$ dans B et B' soient $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

5) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Quelle est le déterminant de l'endomorphisme $g = f - 3.Id_{\mathbb{R}^3}$? En déduire qu'il existe $V \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(V) = 3.V$.

b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (NOUVELLE FEUILLE) - *6 points*

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Supposons $f \circ g = 0$. Etablir une relation entre le rang de f, le rang de g et n.

2) Supposons $f \circ f = 0$. Quel est le rang maximum de f ?

3) Montrer que

$$Im(f) = Ker(f) \Longleftrightarrow (n \text{ pair}, rang(f) = \frac{n}{2} \text{ et } f \circ f = 0).$$

4) Donner la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, vérifiant $Im(f) = Ker(f)$.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 (NOUVELLE FEUILLE) - *6 points*

Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 4x_n - y_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + 4y_n \end{array}\right.$$

où x_0, y_0 *sont deux réels fixés.*

1) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. *Exprimer* X_{n+1} *en fonction de* X_n *à l'aide d'une matrice* A, *puis* X_n *en fonction de* X_0, A *et* n.

2) Soit f_A *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *qui admet* A *comme matrice dans la base canonique* $\mathcal{C}$. *Donner la matrice* A' *de* f_A *dans la base* $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

3) Quelles est la matrice de passage $P_{\mathcal{BC}}$ *de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{C}$ *(i.e.* $P_{\mathcal{BC}}$ *telle que* $coord_{\mathcal{B}}(V) = P_{\mathcal{BC}}.coord_{\mathcal{C}}(V)$*) ?*

4) Exprimer A, *puis* A^2, *puis* A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ *en fonction de* $A', P_{\mathcal{BC}}, n$.

5) En déduire A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ *en fonction de* n.

6) En déduire le comportement lorsque n *tend vers* $+\infty$ *de* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ *avec* $x_0 = y_0 = 1$ *? Même question avec* $x_0 = -y_0 = 1$.