

Aleth Chevalley

Calculatrice et fiches autorisées

Exercice 1 : (8 points) Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} \ln(x^3) & \text{si } x \geq 2 \\ ax^2 + bx + 3 \cdot \ln(2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction f soit continue et dérivable sur \mathbb{R}

Exercice 2 : (8 points) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

- Etude en 0 : f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Admet-elle une asymptote ?
- Etudier le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$. Déterminer son asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3 : (8 points) En utilisant l'inégalité des accroissements finis montrer que pour tout réel t positif,

$$t > \arctan(t) > \frac{t}{1+t^2}$$

Exercice 4 : (8 points) Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 5 : (8 points) Une entreprise fabrique plusieurs milliers de bouchons par jour.

- On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bouchon prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 22$ et d'écart type $\sigma = 0,025$.
Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle $[21,95; 22,05]$
Déterminer avec la précision de la table la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable.
- Dans cette question, on admet que la probabilité qu'un bouchon, pris au hasard dans la production d'une journée, soit défectueux est 0,05.
On prélève, au hasard un échantillon de 80 bouchons (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise). On nomme Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 80 bouchons, associe le nombre de bouchons défectueux dans cet échantillon.
 - Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y (et ses paramètres)?
 - Calculer la probabilité qu'un seul bouchon soit défectueux.
 - Déterminer l'espérance mathématique de Y .
- On approche la loi de la variable aléatoire Y par une loi de Poisson.
 - Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.
 - On note Z une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.
Calculer la probabilité qu'un tel échantillon contienne exactement 1 bouchon défectueux. Comparer avec la valeur trouvée en 2) b)