

Aleth Chevalley

*Calculatrice et fiches autorisées*

**Exercice 1** : (6 points) Soit la fonction  $f : x \mapsto |x| \cdot e^{|x|} + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On étudie cette fonction au voisinage de 0.

- a) Ecrire la fonction en fonction de conditions
- b) Montrer que la fonction est continue en 0
- c) Etudier la dérivabilité au voisinage de 0.

**Exercice 2** : (8 points) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer l'inégalité suivante :

$$\frac{x-1}{1+x^2} \leq \arctan(x) - \frac{\pi}{4} \leq \frac{x-1}{2}$$

**Exercice 3** : (8 points) Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

A l'aide de développements limités, étudier la fonction au voisinage de  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  (équation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente).

**Exercice 4** : (10 points) Etudier et représenter la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

- a) Déterminer le domaine de définition de  $f$
- b) Calculer la dérivée et tracer le tableau de variation avec les points particuliers
- c) Déterminer les asymptotes à la courbe de  $f$
- d) Calculer la tangente en  $(-1)$
- e) (question indépendante) Déterminer le développement limité de la fonction  $f$ , à l'ordre 3 en  $+\infty$ , connaissant le

développement limité de  $\arccos(x)$  à l'ordre 3 en 0 :  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ . En déduire l'asymptote à la courbe représentative de  $f$  et la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.

**Exercice 5** : (8 points) Dans un vignoble de Bourgogne, la probabilité pour qu'un pied de vigne soit atteint d'une maladie est 0,04. On observe 150 pieds de vigne choisis au hasard dans ce vignoble ; on désigne par  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pieds observés atteints par la maladie. On considère que cette maladie ne se transmet pas de pied en pied (événements indépendants).

- 1) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Justifier
  - a) Calculer l'espérance mathématique, et l'écart type de  $X$ . Que représente  $E(X)$  ?
- 2) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la variable aléatoire  $X$  ? Justifier
- 3) En utilisant cette nouvelle loi de probabilité, calculer les valeurs des probabilités suivantes :
  - a) Il y a exactement 5 pieds de vigne malades
  - b) Il y a moins de 5 pieds de vigne malades
  - c) Il y a au moins 5 pieds de vigne malades
  - d) Déterminer le plus petit entier  $k$  tel que la probabilité d'avoir moins de  $k$  pieds de vigne malades soit supérieure à 0,8.