Aleth Chevalley

Médian

MT 19
P 2012

Calculatrice et fiches autorisées.
Vous détaillerez tous les calculs et vous expliquerez votre raisonnement.

Exercice 1 (14 points) : Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{4u_n}$ avec $u_0 = \dfrac{1}{4}$

a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n)
b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) n'est pas monotone ?
c) Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{4} \leq u_n \leq \dfrac{7}{4}$
d) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite
e) Calculer u_{n+2} en fonction de u_n
f) On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : pour tout n $\in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

g) Calculer $u_{n+2} - u_n$ et en déduire la croissance de la suite (v_n) et la décroissance de la suite (w_n)
h) Donner l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n
i) En utilisant la question d), montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent vers une limite et donner cette valeur.
j) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Exercice 2 (6 points) : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - (2m+1)\, x^2 - m^2\, x + 2\, m^3 + m^2$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ et m un réel donné.

a) Donner le quotient et le reste de la division de P(x) par x – (2m+1). Que représente la valeur (2m+1) pour P(x) ?

b) Trouver toutes les racines de P(x).

c) Factoriser P(x).

Exercice 3 (10 points) : Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle irréductible suivante : $F(x) = \dfrac{3x^4 - 1}{x^5 + x^3}$

puis vous donnerez une primitive de F(x).

Exercice 4 (5 points) : On considère la fonction $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

a) Calculer la limite de f en 0^+

b) Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Déterminer la nouvelle fonction f_1

Exercice 5 (5 points) : Soit la fonction $f(x) = a^2.x^3 + x + b$ avec a, b $\in \mathbb{R}$,

Déterminer les valeurs de b et une relation entre a et b pour que l'équation f(x) = 0 admette une seule racine dans l'intervalle fermé [0, 1] ?