

Calculatrice et fiches autorisées.

Vous détaillerez tous les calculs et vous expliquerez votre raisonnement.

Exercice 1 (8 points) : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 3$

- Donner le terme général de chaque suite (u_{2n}) et (u_{2n+1})
- Montrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes
- En déduire la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 2 (6 points) : Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 2$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et a et b des réels donnés.

- Déterminer a et b pour que $P(x)$ admette (-1) comme racine double.
- Quelles sont, dans ce cas, les autres racines du polynôme ?

Exercice 3 (6 points) : Trouver un polynôme P de degré 4 tel que $P(X) + 5$ soit divisible par $(X - 2)^2$ et $P(X) + 1$ soit divisible par X^3 .

Exercice 4 (8 points) : Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 3}{(x^2 - 1)(x - 2)^2} \quad \text{puis déterminer une primitive de } F(x).$$

Exercice 5 (6 points) : Donner un **équivalent** en 0 de $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 6 (6 points) : Donner un **équivalent** en 1 de $f(x) = e^{\cos(\ln(x))}$.