

Calculatrices et fiches autorisées.

Exercice 1: (8 points) Déterminez le reste de la division euclidienne de $A(x) = x^8 + x^6 - x^2 + x$ par $B(x) = x^2 + 1$ sans calculer le quotient.

- Ecrire la formule correspondant à la division euclidienne de A par B
- Quel est le degré maximum du polynôme reste $R(x)$ dans cette division? Quelle sera la forme de ce polynôme $R(x)$?
- Chercher les racines de $B(x)$.
- Calculer A et R pour chaque racine de B
- En déduire $R(x)$.

Exercice 2: (8 points) Soient A et B deux polynômes tels que $A(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)^2(x^2 - 1)$ et $B(x) = (x - 2)(x - 1)(x^2 - 2x + 2)^3$

- Donner toutes les racines de $A(x)$ sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$ avec leur ordre de multiplicité
- Est ce que A et B ont des racines communes sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$? si oui, lesquelles?
- Est ce que les polynômes A et B sont premiers entre eux?
- En déduire un PGCD de A et B .

Exercice 3: (9 points) Calculer les limites ou équivalents des fonctions suivantes :

- Calculer la limite de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3 \sin x}$ quand x tend vers 0.
- Calculer la limite de la fonction suivante, en fonction de α (α étant un réel), en utilisant des équivalents, quand x tend vers $+\infty$: $f(x) = x^\alpha \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^3} - \frac{1}{x} \right)$
- Déterminer un équivalent de la fonction : $f(x) = \frac{e^{-x^2} \sin^2 x}{\ln(\cos x)}$ au point 0.

Exercice 4: (7 points) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} - 1 & \text{si } x < 2 \\ m & \text{si } x = 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- Pour quelle valeur de m un réel donné, la fonction f est-elle continue en 2?
- Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

Exercice 5: (8 points) Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{1}{\ln|x-2|}$

- Déterminer le domaine de définition de f
- Peut-on prolonger f par continuité en 2?
- Si oui, déterminer la fonction correspondante appelée g ?