

Exercice 1 (7 points)

I. Ensembles et applications. Soit $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 $A \mapsto A \cup \{0\}$.

$\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}$ et $\varphi(\mathbb{N}^*) = \mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$. On a $\varphi(\mathbb{N}) = \varphi(\mathbb{N}^*) = \mathbb{N}$. Donc \mathbb{N} et \mathbb{N}^* sont deux antécédents de \mathbb{N} par φ qui sont distincts : l'élément \mathbb{N} de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'admet donc pas un unique antécédent par φ .

Par conséquent, l'application φ n'est pas bijective.

II. Étude d'une fonction en l'infini. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - 4x + 2.$$

1. Soit x au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x}{\frac{1}{2x^2}} &= 2x^2 \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) = 2x^2 \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x \right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x} \\ &= 2x^2 \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x} = 2x^2 \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} + x} = \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + x} = \frac{2x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x}{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1.$$

Par conséquent, $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$.

2. D'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) + (-3x + 2).$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - (-3x + 2) \right) = 0.$$

On en déduit que la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f admet, en $+\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = -3x + 2$.

III. Autour de la fonction sinus. On considère la fonction g définie sur $]0, \pi]$ par :

$$\forall x \in]0, \pi], \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ car $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Donc la fonction g admet une limite finie en 0 (qui vaut 1) : la fonction g est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

2. (a) La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$.

(b) Soit $x \in]0, \pi]$ fixé. La fonction sinus est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins un nombre réel $c \in]0, x[$ tel que : $\sin'(c) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}$. Or, $\sin'(c) = \cos(c)$. Donc : $\frac{\sin(x)}{x} = \cos(c)$. Puisque $c \in]0, x[\subset]0, \pi]$, on a : $\cos(x) \leq \cos(c) \leq \cos(0) = 1$.

D'où : $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$. Sachant $x > 0$, on en déduit : $x \cos(x) \leq \sin(x) \leq x$.

3. La fonction g est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0, \pi]$, donc g est dérivable sur $]0, \pi]$ et :

$$\forall x \in]0, \pi], \quad g'(x) = \frac{\sin'(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

4. (a) D'après la question 2(b) : $\forall x \in]0, \pi]$, $g'(x) \leq 0$. Donc g est décroissante sur $]0, \pi]$.

(b) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

On déduit de 4(a) que : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq g(x)$. Or $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. D'où :

$\frac{2}{\pi} \leq g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ i.e. $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x)$ car $x > 0$. Cette inégalité est encore

vraie si $x = 0$ car $\sin(0) = 0$. Par conséquent : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x)$.

Exercice 2 (7 points)

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.
L'objectif de cet exercice est de calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

1. Soit $P(X) = (1 + X)^n \in \mathbb{C}[X]$

(a) De manière immédiate :

$$P'(X) = n(1 + X)^{n-1}$$

(b) D'après la formule du binôme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k.$$

(c) On dérive l'expression précédente et on trouve :

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k X^{k-1}.$$

Ainsi, en écrivant que les deux formules trouvées pour $P'(X)$ sont égales, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k X^{k-1} = n(1 + X)^{n-1}.$$

D'où, en multipliant par X :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k X^k = nX(1 + X)^{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout nombre complexe z , on a :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k z^k = nz(1 + z)^{n-1}.$$

2. On note $\omega = e^{i\theta}$.

(a) On sait que :

$$1 + \omega = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

(b) On en déduit que :

$$\begin{aligned} n\omega(1 + \omega)^{n-1} &= ne^{i\frac{\theta}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^{n-1} \\ &= n2^{n-1} e^{i\frac{\theta}{2}} \cos^{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \\ &= n2^{n-1} \cos^{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}. \end{aligned}$$

L'expression obtenue ci-dessus est bien la forme exponentielle de $n\omega(1 + \omega)^{n-1}$ car $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ puisque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(c) On repart de l'expression précédente :

$$\begin{aligned} n\omega(1 + \omega)^{n-1} &= n2^{n-1} \cos^{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right) \\ &= n2^{n-1} \cos^{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \\ &\quad + in2^{n-1} \cos^{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

3. Il ne reste plus qu'à extraire les parties réelles de chaque côté de l'égalité dans (*) pour trouver S_n . Plus précisément :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta) \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} e^{ik\theta}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \omega^k\right) \\ &= \operatorname{Re}(n\omega(1 + \omega)^{n-1}) \\ &= n2^{n-1} \cos^{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 3 (7 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n - 1$$

- $P'_n(X) = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1} = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$.
- Soit α une racine complexe de $P_n(X)$. On suppose que α est de multiplicité différente de 1, donc de multiplicité supérieure ou égale à 2.

Alors $P_n(\alpha) = 0$ et $P'_n(\alpha) = 0$. D'où $n(n+1)\alpha^{n-1}(\alpha-1) = 0$.

On déduit de cette dernière égalité $\alpha^{n-1} = 0$ ou $(\alpha-1) = 0$.

Donc $\alpha = 0$ (car $n-1 \geq 1$) ou $\alpha = 1$.

Donc $P_n(0) = 0$ ou $P_n(1) = 0$.

Or $P_n(0) = n0^{n+1} - (n+1)0^n - 1 = -1$ et $P_n(1) = n1^{n+1} - (n+1)1^n - 1 = -2$.

Ainsi $0 = -1$ ou $0 = -2$ ce qui est absurde.

Finalement α est une **racine simple** de $P_n(X)$.

- (a) La fonction polynomiale P_n est dérivable sur \mathbb{R} et d'après la question 1., $\forall t \in \mathbb{R}, P'_n(t) = n(n+1)t^{n-1}(t-1)$.
Donc pour tout réel $t \geq 1$, $P'_n(t)$ est du signe de $(t-1)$.
D'où $P'_n(1) = 0$ et $\forall t \in]1, +\infty[$, $P'_n(t) > 0$: P_n croît strictement sur $[1, +\infty[$.

La fonction P_n étant continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$, d'après le **théorème de la bijection**, elle est bijective de I à valeurs dans $J = P_n([1, +\infty[)$. De plus, par continuité et croissance de P_n , on a :

$$J = \left[P_n(1), \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) \right] = \left[P_n(1), \lim_{t \rightarrow +\infty} n t^{n+1} \right] = [-2, +\infty[$$

Comme l'intervalle J contient zéro et que P_n est bijective de I sur J , il existe une unique solution dans I à l'équation d'inconnue t : $P_n(t) = 0$.

Cette solution (qui dépend de n) est notée u_n : $P_n(u_n) = 0$

- (b) On a vu que $P_n(1) = -2$
et $P_n(2) = n2^{n+1} - (n+1)2^n - 1 = 2^n(2n - n - 1) - 1 = 2^n(n-1) - 1$.
Or $n \geq 2$ donc $2^n \geq 4$ et $n-1 \geq 1$. D'où $2^n(n-1) \geq 4$ puis $P_n(2) \geq 4 - 1 > 0$

$$\text{Ainsi } \boxed{P_n(1) < \underbrace{P_n(u_n)}_0 < P_n(2)}$$

Comme P_n est croissante sur $[1, +\infty[$ on obtient $1 < u_n < 2$

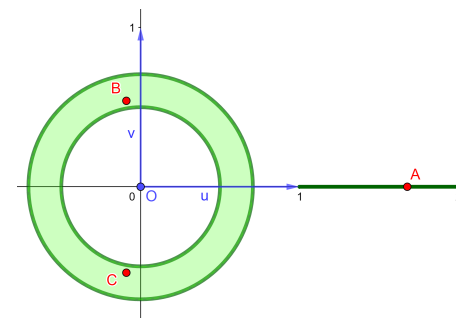
- Dans cette question, on pose $P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 1$
 - $P(X)$ étant scindé sur \mathbb{C} : $P(X) = 2(X-a)(X-b)(X-c)$
 $= 2[X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ac)X - abc]$

D'où, par identification des coefficients,

$$\begin{cases} -2(a+b+c) = -3 \\ -2abc = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a+b+c = 3/2 \\ abc = 1/2 \end{cases}$$

- a est la seule racine réelle du polynôme $P(X) = P_2(X)$. Donc $a = u_2$.
D'après 3.(b), $1 < u_2 < 2 \implies 1 < a < 2$. D'après 4.(a), $abc = 1/2 = a b \bar{b} = a |b|^2$
On en déduit que $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 1$ et que $|b|^2 = \frac{1}{2a}$

D'où $\frac{1}{4} < |b|^2 < \frac{1}{2}$ puis $\frac{1}{2} < |b| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} < |b| < \frac{\sqrt{2}}{2}$



- On revient au cas général où $n \geq 2$.
 - On rappelle que $P_n(u_n) = 0$ d'où $n u_n^{n+1} - (n+1) u_n^n - 1 = 0$
d'où $n u_n^{n+1} - (n+1) u_n^n = 1$ d'où $n u_n u_n^n - (n+1) u_n^n = 1$
d'où $u_n^n (n u_n - (n+1)) = 1$. Donc $\boxed{u_n^n (n u_n - n - 1) = 1}$
 - D'après l'égalité précédente, $n u_n - n - 1 = \frac{1}{u_n^n}$
Or on a prouvé que $u_n > 1$. Donc $u_n^n > 1^n$ puis $\frac{1}{u_n^n} < 1$
Par conséquent $n u_n - n - 1 < 1$
 - D'où $n u_n \leq 1 + n + 1$ Donc $u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$. On rappelle que $1 \leq u_n$.
Ainsi, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, nous avons

$$\boxed{1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}}$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$. Le **théorème des gendarmes** permet de conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente et que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$