Examen final

MT1A-MT1B-MT1D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 (7 points)

*Les trois questions **I, II** et **III** de cet exercice sont indépendantes.*

I. Ensembles et applications. On désigne par $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et on considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & & A & \longmapsto & A \cup \{0\} \end{array}$$

Donner $\varphi(\mathbb{N})$ et $\varphi(\mathbb{N}^*)$. L'application φ est-elle bijective ?

II. Étude d'une fonction en l'infini. On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - 4x + 2.$$

1. Démontrer que $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$.
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera l'équation.

III. Autour de la fonction sinus. On considère la fonction g définie sur $]0,\pi]$ par :

$$\forall x \in]0,\pi]\,, \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Justifier brièvement pourquoi la fonction g est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur en zéro de la fonction g ainsi prolongée.
2. (a) Rappeler la monotonie de la fonction cosinus sur $[0,\pi]$.
   (b) On se fixe un réel $x \in]0,\pi]$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction sinus sur $[0\,,x]$ démontrer que :
   $$x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$
3. Justifier brièvement que g est dérivable sur $]0,\pi]$ et calculer sa dérivée en tout point de cet intervalle.
4. (a) Étudier les variations de g sur $]0,\pi]$ à l'aide des questions précédentes.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]\,, \quad \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x).$$

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 (7 points)

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. L'objectif de cet exercice est de calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

1. Soit $P(X) = (X+1)^n \in \mathbb{C}[X]$.
   (a) Donner $P'(X)$.
   (b) Développer $P(X)$ à l'aide de la formule du Binôme de Newton.
   (c) En dérivant l'expression précédente, vérifier que, pour tout nombre complexe z,

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} z^k = n\, z\, (1+z)^{n-1} \qquad (\star)$$

2. On note $\omega = \mathrm{e}^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $1 + \omega = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) En déduire la forme exponentielle de $n\,\omega\,(1+\omega)^{n-1}$.
   (c) Donner alors la forme algébrique de $n\,\omega\,(1+\omega)^{n-1}$.
3. À l'aide de l'égalité $(\star)$, calculer S_n.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 (7 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit le polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n(X) = n\,X^{n+1} - (n+1)\,X^n - 1.$$

1. Calculer son polynôme dérivé $P_n'(X)$ sous forme factorisée.
2. Soit α une racine complexe de $P_n(X)$.
   Prouver en raisonnant par l'absurde, que α est de multiplicité 1.
3. (a) Démontrer que l'équation d'inconnue t : $P_n(t) = 0$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[1\,,\,+\infty[$. On notera u_n cette solution.
   (b) Vérifier que $1 < u_n < 2$.
4. (a) On rappelle que u_n est racine de $P_n(X)$. Vérifier que $u_n^n\,(n\,u_n - n - 1) = 1$.
   (b) En déduire que $n\,u_n - n - 1 \leqslant 1$ puis un encadrement de u_n
   (c) Établir la convergence et déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$
5. Dans cette question uniquement, on prendra $n = 2$. On pose $P(X) = 2\,X^3 - 3\,X^2 - 1$.
   (a) On admet que le polynôme $P(X)$ admet une seule racine réelle $a = u_2$ et deux racines complexes conjuguées b et $c = \overline{b}$. Donner les valeurs exactes de $a+b+c$ et $a\,b\,c$.
   (b) Déduire de l'encadrement de 3.(b) et de la valeur de abc , que $\dfrac{1}{2} < |b| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.