

Automne 2021

Travail à rendre sur Moodle le jeudi 6 janvier 2022 à 18h au plus tard

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1

1) Soit $Q(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q . On sait que $x_1 + x_2 = 2$.

1. Déterminer la valeur de x_1x_2 , x_3x_4 et $x_3 + x_4$.

2. En déduire les valeurs des racines.

2) Déterminer a et b dans \mathbb{R} tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 2

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \arctan(k+1) - \arctan(k) \leq \frac{1}{k^2+1}$.

2) Trouver les primitives de $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+5}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Calculer la dérivée de f .

3) En déduire le signe de f .

TOURNER LA PAGE

Exercice 4

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$|(x-1)(x+3)| = 2,$$

2) Pour $z \in \mathbb{C} - \{2i\}$, on pose $\phi(z) = \frac{z-3+i}{2i-z}$.

Déterminer $\{z \in \mathbb{C} / \phi(z) \in \mathbb{R}\}$.

3) Comment choisir l'entier $n \in \mathbb{N}$ pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un réel ?

Exercice 5

Soit n un entier strictement positif. On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f_n(0) &= 0 \\ f_n(x) &= \arctan\left(\frac{n}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$$

1- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction f_n est-elle continue ?

2- Etudier les variations de f_1 , f_2 , f_3 et représenter ces fonctions. On précisera en particulier les limites de $f'_n(x)$ lorsque x tend vers 0^+ et quand x tend vers 0^- .

3- pour $x \in \mathbb{R}$ **fixé**, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

4- On note f l'application qui à x associe $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Est-elle continue sur \mathbb{R} ? La représenter.