UTBM MT1C le 9 Janvier 2023

Arthur Lannuzel

Automne 2022

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 6 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1. *Déterminer la limite*

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(\cos(x))}{sin^2(x)}.$$

Justifier soigneusement.

2. *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ 2y+2x \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette application est-elle surjective ? injective ?

Justifier soigneusement.

3. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$.*

Calculer la dérivée de f sur son ensemble de définition (qu'on determinera).

Justifier soigneusement

Exercice 2 *- 2 points*

Déterminer les racines cubiques de

$$4.\sqrt{2}.(1+i).$$

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *4 points*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1. *Montrer que, pour tout entier* n *,* $u_n \leq 4$ *et que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
2. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et déterminer la limite.*

Justifier soigneusement.

Exercice 4 - *6 points*

On cherche les fonctions f *continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$(*) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On pose $f(1) = a$*.*
Soit f *une fonction vérifiant* $(\star)$*.*

1. *Montrer que* $f(0) = 0$*, puis que* f *est impaire.*
2. *Montrer que pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *et tout réel* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $f(n.x) = n.f(x)$*, et que* $f(n) = na$*.*
3. *Montrer que pour tout rationnel* $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0)$*, on a* $f(r) = r.a$*.*
4. *En déduire que pour tout réel* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $f(x) = x.a$*.*
   (Indication : utiliser le fait que tout élément de $\mathbb{R}$ *est limite d'une suite d'éléments de* $\mathbb{Q}$*)*

Justifier soigneusement.

Exercice 5 - *2 points*

Trouver deux polynômes $U(X)$ *et* $V(X)$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $A(X).U(X)+B(X).V(X) = 1$*, où* $A(X) = X^7 - X - 1$ *et* $B(X) = X^5 - 1$*.*

Indication : On pourra déterminer un PGCD de $A(X)$ *et* $B(X)$