UTBM MT1C le 10 Janvier 2025

Arthur Lannuzel

Automne 2024

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 6 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Peut-on trouver $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $]a, b[$ telle que $f(]a, b[) =]c, d]$? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

2) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction réelle à une variable réelle définie pas $f(x) = \arcsin(e^{x+1})$.

3) La fonction ci-dessous est-elle continue en 0 ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{(e^x-1)^2}{\sin(x^2)} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

4) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ avec

$$u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n.$$

.

Justifier soigneusement.

Exercice 2 *- 4 points*

1) Factoriser en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme :

$$P(X) = 6.X^4 + 5.X^2 + 1.$$

2) Trouver deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$A(X).U(X) + B(X).V(X) = 1,$$

où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.
(On pourra commencer par déterminer un PGCD de $A(X)$ et $B(X)$)

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *4 points*

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \arctan(k+1) - \arctan(k) \leq \frac{1}{k^2+1}$.

2) Trouver les primitives de $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+5}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Justifier soigneusement.

Exercice 4 - *7 points*

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *où* I *est un intervalle.*

On dit que f est lipschitzienne de rapport $k > 0$ sur I

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k.|x - y|.$$

Si f est lipschitzienne de rapport $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

1) Montrer que si f *lipschitzienne de rapport* $k > 0$ *sur* I *alors* f *est continue sur* I.

2) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ *est lipschitzienne de rapport* $\frac{1}{2}$ *sur* $[1, +\infty[$.

3) Admettons le **Théorème du point fixe suivant :**
Soit $f : I \longrightarrow I$ (I intervalle fermé) contractante alors la suite définie par $u_0 \in I$, $u_n = f(u_{n-1})$ converge vers l'unique point fixe de f dans I.

a) Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{6}.x^2 + 1$. *Montrer que* f *vérifie les hypothèses du théorème sur* $[1, 2]$.

b) En déduire que la suite ci-dessous converge et déterminer sa limite :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n)^2 + 1 \end{cases}$$

Justifier soigneusement.