

# Automne 2025

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

**Exercice 1** (*Applications directes du cours*) - 8 points

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1. Déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}.$$

*Justifier soigneusement.*

2. Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 2y + 2x \end{pmatrix}$$

*Cette application est-elle surjective ? injective ?*

*Justifier soigneusement.*

3. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ .

*Calculer la dérivée de  $f$  sur son ensemble de définition (qu'on déterminera).*

*Justifier soigneusement*

4. A quelle condition sur  $m \in \mathbb{R}$ , le polynôme suivant a-t-il une racine strictement négative et une autre strictement positive :

$$P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m.$$

*Justifier !*

**Exercice 2** - 2 points

Déterminer les racines cubiques de

$$4.\sqrt{2}.(1 + i).$$

*Justifier soigneusement.*

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 3** - 4 points

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1. Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq 4$  et que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer la limite.

Justifier soigneusement.

**Exercice 4** - 3 points

Déterminer un monôme  $a.x^n$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ) équivalent en 0 à  $f(x) = \sin(x) - x$ .

**Exercice 5** - 3 points

Trouver deux polynômes  $U(X)$  et  $V(X)$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $A(X).U(X) + B(X).V(X) = 1$ , où  $A(X) = X^7 - X - 1$  et  $B(X) = X^5 - 1$ .

Indication : On pourra déterminer un PGCD de  $A(X)$  et  $B(X)$