Exercice 1

1. (a) Soit $P(X) = (X^2+3X)^2 + (3X+5)^2$. En développant, on obtient:

$$P(X) = X^4 + 6X^3 + 18X^2 + 30X + 25.$$

$\boxed{\text{Donc } P(X) \text{ est de degré 4 et son coefficient dominant est 1.}}$

(b) Démontrons par l'absurde que $P(X)$ n'admet aucune racine réelle.
Supposons que $P(X)$ admette au moins une racine réelle α. Alors $P(\alpha) = 0$.
Or, $P(\alpha) = \left(\alpha^2+3\alpha\right)^2 + (3\alpha+5)^2$. Puisque $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\left(\alpha^2+3\alpha\right)^2 \geqslant 0$ et $(3\alpha+5)^2 \geqslant 0$, donc :

$$0 \leqslant \left(\alpha^2+3\alpha\right)^2 \leqslant P(\alpha) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (3\alpha+5)^2 \leqslant P(\alpha).$$

Sachant que $P(\alpha) = 0$, on en déduit :

$$\left(\alpha^2+3\alpha\right)^2 = 0 \quad \text{et} \quad (3\alpha+5)^2 = 0.$$

α est donc solution du système suivant :

$$\begin{cases} \alpha^2+3\alpha = 0 \\ 3\alpha+5 = 0. \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} \alpha^2+3\alpha = 0 \\ 3\alpha+5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(\alpha+3) = 0 \\ \alpha = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha+3 = 0 \\ \alpha = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha \in \{0;-3\} \\ \alpha = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \in \{0;-3\} \\ \alpha = -\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

On obtient une contradiction car $-\dfrac{5}{3} \notin \{0;-3\}$.

Par conséquent, $\boxed{P(X) \text{ n'admet aucune racine réelle}}$.

2. (a) Soit α une racine complexe de $P(X)$. Calculons $P(\overline{\alpha})$.

$$\begin{aligned} P(\overline{\alpha}) &= \left(\overline{\alpha}^2+3\overline{\alpha}\right)^2 + (3\overline{\alpha}+5)^2 \\ &= \left(\overline{\alpha^2+3\alpha}\right)^2 + \left(\overline{3\alpha+5}\right)^2 \\ &= \overline{\left(\alpha^2+3\alpha\right)^2} + \overline{(3\alpha+5)^2} \\ &= \overline{P(\alpha)}. \end{aligned}$$

Puisque $P(\alpha) = 0$, alors : $\boxed{P(\overline{\alpha}) = \overline{0} = 0}$.

(b) Par définition de $P(X)$,

$$\begin{aligned} \boxed{P(X)} &= (X^2+3X)^2 + (3X+5)^2 \\ &= (X^2+3X)^2 - i^2(3X+5)^2 \\ &= (X^2+3X)^2 - (3iX+5i)^2 \\ &= \left((X^2+3X)-(3iX+5i)\right)\left((X^2+3X)+(3iX+5i)\right) \\ &\boxed{= \left(X^2+3(1-i)X-5i\right)\left(X^2+3(1+i)X+5i\right)}. \end{aligned}$$

(c) Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+3(1+i)z+5i = 0$ d'inconnue z, on commence par calculer son discriminant Δ :

$$\Delta = (3(1+i))^2 - 4\times 1\times 5i = 9\left(1+2i+i^2\right) - 20i = -2i.$$

On remarque que : $\Delta = 2\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2$.

Donc l'équation $z^2+3(1+i)z+5i = 0$ admet deux solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ qui sont données par :

$$z_1 = \frac{-3(1+i)-\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3(1+i)+\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\times 1}.$$

Or,

$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $z^2+3(1+i)z+5i = 0$ sont :

$$\boxed{z_1 = -1-2i} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = -2-i}.$$

(d) Le polynôme $P(X)$ étant de degré 4, il admet au plus 4 racines complexes distinctes.
D'après la question précédente, les racines du polynôme $X^2-3(1+i)X+5i$ sont $z_1 = -1-2i$ et $z_2 = -2-i$. Puisque ce polynôme divise $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ (d'après la question 2(b)), on en déduit que z_1 et z_2 sont deux racines complexes de $P(X)$.
D'après la question 2(a), $P(\overline{z_1}) = P(\overline{z_2}) = 0$. Donc $\overline{z_1} = -1+2i$ et $\overline{z_2} = -2+i$ sont également des racines de $P(X)$.
Ainsi, z_1, z_2, $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ sont 4 racines distinctes de $P(X)$. On en déduit que les racines complexes de $P(X)$ sont exactement :

$$\boxed{z_1 = -1-2i, \quad z_2 = -2-i, \quad \overline{z_1} = -1+2i \quad \text{et} \quad \overline{z_2} = -2+i}.$$

Exercice 2

1. Théorème des accroissements finis. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. Soit $x > 0$ fixé. On sait que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle $]0, x[$ tel que :
$$\arctan'(c) = \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}. \quad (\star)$$
Or,
$$\begin{cases} \arctan(0) = 0 \quad \text{car} \quad \tan(0) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \in \left]-\frac{\pi}{2}\right[\\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \dfrac{1}{1 + y^2}. \end{cases}$$
En remplaçant dans $(\star)$, on obtient :
$$\frac{1}{1 + c^2} = \frac{\arctan(x)}{x}. \quad (\star\star)$$
De plus,
$$\begin{aligned} c \in]0, x[&\implies 0 < c^2 < x^2 \quad \text{car la fonction } t \mapsto t^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\implies 1 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \\ &\implies 1 > \frac{1}{1 + c^2} > \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+*} \\ &\implies 1 > \frac{\arctan(x)}{x} > \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{d'après } (\star\star). \end{aligned}$$
En multipliant par x, qui est strictement positif, on en déduit:
$$\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x}.$$

3. (a) On considère la fonction f définie par: $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$. D'après l'encadrement obtenu à la question précédente, on a :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{1}{1 + x^2} < f(x) < 1.$$
Or, $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x^2} = 1$. On peut donc déduire du théorème des gendarmes que:
$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}.$$

(b) Notons que puisque la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $I =]0\,, +\infty[$. De plus,
$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad \boxed{f'(x)} &= \frac{\arctan'(x) \times x - \arctan(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{1+x^2} \times x - \arctan(x)}{x^2} \\ &\boxed{= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2}}. \end{aligned}$$

(c) Étudions la monotonie de f sur $I =]0, +\infty[$. Soit $x \in I$. D'après la question précédente,
$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2}.$$
Or $x^2 > 0$ et d'après la question 2, $\dfrac{x}{1 + x^2} - \arctan(x) < 0$. Donc $f'(x) < 0$. Par conséquent, f' est strictement négative sur I, donc f est strictement décroissante sur I. D'autre part, f étant dérivable sur I, elle est continue sur I. Ainsi f vérifie les hypothèses du théorème de la bijection. Il en découle que f réalise une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle
$$J = f(I) = \left] \lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 0} f(x) \right[.$$

- D'après la question 2(a), $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\arctan(x) \times \dfrac{1}{x} \right)$, avec $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I =]0, +\infty[\text{ dans } J =]0, 1[}$.'

4. D'après la question 2(a), f admet une limite finie en 0 donc f est prolongeable par continuité en 0. Si on note f le prolongement par continuité de f à l'intervalle $[0, +\infty[$, alors : $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ i.e. $\boxed{f(0) = 1}$.

Exercice 3 $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

1. (a) $c_0 = \dfrac{1}{0+1}\dbinom{0}{0} = 1$ et $c_1 = \dfrac{1}{1+1}\dbinom{2}{1} = \dfrac{1}{2}\times 2 = 1$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$$
$$= \frac{1}{n+2}\times\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+2}\times\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!}$$
$$= \frac{2(n+1)\,(2n+1)}{(n+2)(n+1)(n+1)}\times\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}\times\underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{c_n}$$

   Ainsi , $c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}c_n$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $n+1>0$ et $\dbinom{2n}{n} \geqslant 1$, nous avons $\boxed{c_n > 0}$.

   D'après la question précédente, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{4n+2}{n+2}$.

   Or $n \geqslant 0 \implies 4n \geqslant n \implies 4n+2 \geqslant n+2 > 0 \implies \dfrac{4n+2}{n+2} \geqslant 1$.

   Donc $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \geqslant 1$ puis $c_{n+1} \geqslant c_n$. Ainsi la suite $\boxed{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

2. On définit les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{4^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = S_n + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la méthode de la quantité conjuguée après avoir réduit au même dénominateur la différence :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n}(n+1)+n\sqrt{n+1}}$$

   Par conséquent $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n} > 0 \implies (n+1)\sqrt{n+1} \geqslant (n+1)\sqrt{n} > 0$
   De plus $n+1 \geqslant n > 0 \implies (n+1)\sqrt{n+1} \geqslant n\sqrt{n+1} > 0$.
   En ajoutant membre à membre les dernières inégalités des lignes ci-dessus, il vient :
   $2(n+1)\sqrt{n+1} \geqslant (n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1} > 0$

   Par passage à l'inverse : $\dfrac{1}{2(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

   Donc, d'après la question 2.(a), $\dfrac{1}{2(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

   En multipliant chaque membre par 2, on en déduit que

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

   (c) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \dfrac{c_{n+1}}{4^{n+1}}$ est positif.

   Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} \geqslant S_n$. Donc la suite $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_{n+1} - T_n = (S_{n+1} - S_n) + \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

   $= \dfrac{c_{n+1}}{4^{n+1}} - \left(\dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$. Or on a admis que $c_{n+1} \leqslant \dfrac{4^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

   Donc $T_{n+1} - T_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} - \left(\dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$ est négatif d'après la question 2.(b). Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1} \leqslant T_n$.

   Donc la suite $\boxed{(T_n) \text{ est décroissante}}$

   • $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n - S_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$

   • Ainsi les suites (S_n) et (T_n) sont, *par définition*, adjacentes.
   On en déduit, d'après le *théorème des suites adjacentes*, qu'elles sont convergentes et qu'elles ont même limite.