Final MT1E, Automne 2023

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Suites et fonctions (12 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- **a.** Dresser le tableau de variations de f (on précisera les limites en $\pm\infty$).
- **b.** Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2+u_n+1} \end{cases}$$

- **a.** Soit p un entier naturel non nul, montrer que $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.
- **b.** En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
- **c.** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- **d.** Vérifier que $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
- **e.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. Montrer que $\forall x \geqslant 2,\ \dfrac{1}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-1)$.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \implies \frac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln n$$

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot u_n$, et en déduire un équivalent simple de la suite (u_n).

Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

Soit n un entier non nul, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

1. Déterminer $\mathbb{U}_4$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}_{15}$.

a. Montrer qu'il existe $z_3 \in \mathbb{U}_3$ et $z_5 \in \mathbb{U}_5$ tels que $z = z_3 \times z_5$.
Indications.

- Écrire z sous forme exponentielle (comme dans le cours)
- Utiliser que si $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 5(2k) - 3(3k)$

b. Exprimer z_3 et z_5 comme des puissances de z.

3. **a.** Montrer que $\mathbb{U}_3 \cap \mathbb{U}_5 = \{1\}$.

b. En déduire que dans la question **2.a.**, les nombres z_3 et z_5 sont uniques.

Exercice 3 : Polynômes (4 points)

Soit $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

1. **a.** Montrer que i est racine de P.

b. En déduire un polynôme de degré 2 qui divise P.

2. En déduire la factorisation de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, et de $\mathbb{C}[X]$.