Final MT1E, Automne 2024

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Suites et fonctions (10 points)

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$$

On définit alors $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$

1. **a.** Énoncer le théorème des accroissements finis.

b. Démontrer ce théorème.

2. Supposons qu'il existe $c, c' \in \mathbb{R}$ tels que $f(c) = c$, et $f(c') = c'$.

a. Montrer que $|f(c) - f(c')| \leqslant k|c - c'|$.

b. En déduire que $c = c'$.

3. On considère la suite définie par récurrence par

$$u_0 \in \mathbb{R},\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant k|u_n - u_{n-1}|$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|$.

c. Montrer que $\forall m \geqslant n \geqslant 0,\ |u_m - u_n| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$.

d. On admet que cela entraîne que la suite converge vers un réel ℓ. Montrer que $f(\ell) = \ell$, et qu'il n'existe aucun autre réel ℓ' tel que $f(\ell') = \ell'$.

4. Application. Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

a. Calculer f', puis f'', et montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$.

b. En déduire le tableau de variations de f', puis déterminer $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$.

c. Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et définir sa limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, puis donner z^2 sous forme exponentielle.

2. Donner z sous forme exponentielle.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 : Polynômes (7 points)

1. Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, avec $B \neq 0$. Énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B.

2. Dans cette question, $A = (X-3)^{12} + (X-2)^6 - 2$, et $B = (X-3)(X-2)$. Soit R le reste de la division euclidienne de A par B.

a. Justifier que R est de la forme $R = aX + b$, avec a et b deux nombres réels.

b. Déterminer $R(2)$ et $R(3)$, en déduire la valeur de a et b.

3. On revient à la situation générale de la première question, et on note R le reste de la division euclidienne de A par B. Soit α un réel. Montrer que $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ si et seulement si $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$.

4. Soient $p \in \mathbb{R}^\star$ et $q \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que $A = X^3 + pX + q$.

a. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par A' (le polynôme dérivé).

b. On suppose que α est racine au moins double de A. Montrer que $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

c. En déduire que A admet une racine au moins double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.