Final MT1E, Automne 2025

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Suites et fonctions (11 points)

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$$

1. **a.** Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b. En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution notée $u_n \in [0,1]$.

c. Donner la valeur de u_1.

2. **a.** Pour tout réel $x \in [0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

b. En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente, on notera ℓ sa limite.

3. **a.** Pour tout réel $x \neq 1$, donner la formule de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

b. En déduire que pour tout $x \neq 1$, on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

c. Donner alors une expression sans signe $\sum$ de $f_n(x)$ pour $x \in [0,1[$.

4. **a.** Déterminer u_2, puis en déduire que pour tout $n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^n$.

c. À l'aide de la question **3.c.**, montrer que pour $n \geqslant 2$,

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}$$

d. Donner la valeur de ℓ.

Exercice 2 : Nombres complexes (4 points)

1. Exprimer $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Résoudre l'équation complexe $z^3 = 1+i$. On notera z_0, z_1, z_2 ces solutions.
3. Calculer $A = z_0 + z_1 + z_2$, et $B = z_0 z_1 z_2$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1-i$.

Exercice 3 : Polynômes (5 points)

Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

1. Calculer le PGCD de P et P'.
2. Quelles sont les racines communes à P et à P' ?
3. Quelles sont les racines multiples de P dans $\mathbb{C}$?
4. Montrer que $(X^2+1)^2$ divise P.
5. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.