UTBM 19 Janvier 2007
MT20 durée 3 heures

EXAMEN FINAL

La qualité et la précision de la rédaction sera prise en compte pour l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (6 points) On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcll} x' &=& -2x-4y & (1)\\ y' &=& x+3y & (2)\end{array}\right.$$

Avec les conditions initiales $x(0)=0$ et $y(0)=1$.

1. Dans cette question on résout (S) sans utiliser la transformée de Laplace.
   (a) Montrer en dérivant l'équation (1) que la fonction x vérifie l'équation du second degré $x''-x'-2x=0 \quad (E)$.
   (b) Résoudre (E).
   (c) Après avoir exprimé y en fonction de x et x', en déduire la solution de (S_1).
2. Résoudre (S_1) en utilisant la transformée de Laplace.
3. On considère maintenant le système
$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& ax+by\\ y' &=& cx+dy\end{array}\right.$$
   où a,b,c,d sont des réels, avec comme conditions initiales $x(0)=0$ et $y(0)=1$. En reprenant les calculs des questions précédentes par la méthode de votre choix (soit en utilisant la première méthode, soit Laplace) montrer que x est une fonction du type $x(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$ si et seulement si $(a+d)^2-4(ad-bc)>0$.

Exercice 2 (3 points) Soit f une fonction de deux variables définie sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x,y)=\frac{1}{x}sin(xy)$$

1. Dans cette question nous allons montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe :
   (a) Soit $a>0$ un réel fixé. En étudiant la fonction $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=sin(ax)-ax$ montrer que $sin(ax)\leqslant ax, \forall x\in\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que si $(x,y)\in]0,\sqrt{\pi}[\times]0,\sqrt{\pi}[$ alors $sin(xy)\geqslant 0$.
   (c) À l'aide de (a) et (b), encadrer $f(x,y)$ lorsque $(x,y)\in]0,\sqrt{\pi}[\times]0,\sqrt{\pi}[$. En déduire $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
2. Montrer que f n'a pas d'extremums sur U.
3. Montrer que f n'a pas de majorants sur U. C'est à dire montrer qu'il n'existe pas de $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall(x,y)\in U,\ f(x,y)\leqslant M$. [Indication : pour montrer qu'il n'existe pas de majorants, vous pouvez montrer qu'il existe (u_n,v_n) une suite de points de U telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n,v_n)=+\infty$.]

Exercice 3 (4 points) Dans cet exercice on étudie les extremums des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ du type $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ où a, b, c sont des réels.

1. Étude de quelques exemples :
   (a) Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de $g(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ et que $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum.
   (b) De même montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de $h(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$ et que $(0,0)$ est un minimum local. Montrer alors que c'est un minimum global (on pourra essayer d'exprimer h comme une somme de deux fonctions au carré).
   (c) Montrer que $k(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ a une infinité de points critiques. Représenter l'ensemble des points critiques dans $\mathbb{R}^2$. Peut-on conclure sur la nature de ces points critiques ? Montrer cependant que $(0,0)$ est un minimum global.
2. Cas général : soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ où a, b, c sont des réels.
   (a) Montrer que (x,y) est un point critique si et seulement si (x,y) est solution du système :
   $$\begin{cases} 2ax + by &= 0 \\ bx + 2cy &= 0 \end{cases}$$
   (b) Montrer que ce système a pour unique solution $(0,0)$ si et seulement si $b^2 - 4ac \neq 0$.
   (c) On suppose $a > 0$, donner une condition sur a, b, c pour que $(0,0)$ soit un minimum local.
   (d) Montrer alors que $(0,0)$ est un minimum global.

Exercice 4 (2 points) Dans cet exercice on veut résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ (E)$$

1. Montrer que $\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \to & (x,y) = (u+v, u-3v) \end{array} \right.$ est bien une bijection en explicitant l'application ϕ^{-1}.
2. Soit $F = f \circ \phi$, c'est à dire $F(u,v) = f(u+v, u-3v)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial v}$.
3. En déduire que (E) est équivalente à $\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \ (E')$.
4. Intégrer (E') et conclure en utilisant $f = F \circ \phi^{-1}$.

Exercice 5 (5 points) Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \quad (E)$$

Où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'application $\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \to & (x,y) = (u+v, u-v) \end{array} \right.$ est bien une bijection. Montrer que ϕ et ϕ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$.
2. Soit $F = f \circ \phi$, c'est à dire $F(u,v) = f(u+v, u-v)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ en fonction des dérivées partielles secondes de f.

4. En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = u + v \quad (E')$.
5. Intégrer (E') puis en utilisant le fait que $f = F \circ \phi^{-1}$ donner la forme générale des solutions de (E).
6. D'après ce qui précède les fonctions suivantes sont-elles solutions de (E) ?
   (a) $f_1(x, y) = \frac{(x+y)^3}{48} + \frac{(x-y)(x+y)^2}{16} + sin(\frac{y-x}{2})$.
   (b) $f_2(x, y) = \frac{(x-y)^3}{48} + \frac{(x+y)(x-y)^2}{16}$.
   (c) $f_3(x, y) = \frac{(x-y)^3}{48} + \frac{(x+y)(x-y)^2}{16} + \frac{x-y}{2} sin(\frac{x+y}{2}) + exp(\frac{x+y}{2})$.
7. En vous inspirant des questions $3, 4, 5$ résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial xy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \quad (E')$$

Formulaire

Propriétés de la transformée de Laplace

1. (linéarité) $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$.
2. (multiplication par exponentielle) $\mathcal{L}(f(t)e^{-at}) = \mathcal{L}(f)(p + a)$.
3. (transformée des dérivées) $\mathcal{L}(y^{(n)}) = p^n \mathcal{L}(y) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$.

Transformées usuelles

(Les fonctions sont supposées causales)

1. $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$
2. $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
3. $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$
4. $\mathcal{L}(cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$
5. $\mathcal{L}(sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$