FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont autorisée.

Exercice 1 Laplace (6 points)

1. Résoudre en appliquant la transformée de Laplace l'équation différentielle suivante,

$$y'' - 3y' + 2y = 4 \text{ avec les conditions initiales } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

2. On considère l'équation différentielle suivante,

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ avec les conditions initiales } y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$$

a. En appliquant Laplace montrer que $Y = \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{\alpha a p - b\alpha + a\beta}{ap^2 + bp + c}$.

b. Si $\Delta > 0$ comment se décompose $\dfrac{\alpha a p - b\alpha + a\beta}{ap^2 + bp + c}$? (donner juste le format de a décomposition sans calculer les coefficients). Quel résultat du cours sur les équations linéaires du second ordre à coefficients constant peut-on redémontrer par cette méthode ?

Exercice 2 Fonctions de deux variables (6 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{-a(x^2+y^2)}$ où a est une constante réelle.

1. Justifier rapidement que f est $\mathcal{C}^1$.

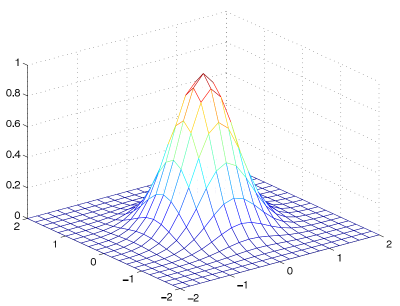
2. Si $a = 0$ que vaut f ? Quels sont alors ses points critiques ?

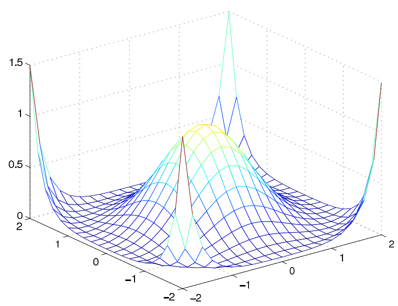
3. On suppose pour la suite de l'exercice que $a \neq 0$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f.

4. Démontrer que $(0,0)$ est un maximum si $a > 0$ et un minimum si $a < 0$.

5. En passant en coordonnées polaires calculer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)$ (on distinguera les cas $a > 0$ et $a < 0$).

6. On suppose $a = 2$. Quelle surface correspond à la représentation graphique de f ? Justifier votre réponse.





Exercice 3 EDP (8 points)

Dans cet exercice on étudie l'équation aux dérivées partielles suivante,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (E)$$

1. Méthode de séparation des variables. On cherche une solution f de (E) de la forme $f(x, y) = X(x)Y(y)$.

a. Montrer que $x\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y}$. En déduire qu'il existe une constante réelle k telle que

$$x\frac{X'}{X} = k \quad (E_1) \quad \text{et} \quad -\frac{Y'}{Y} = k \quad (E_2)$$

b. Résoudre (E_1) et (E_2).

c. On impose comme condition aux bords $u(x, 0) = 2x + 3x^3$. Proposer une solution de (E).

2. Méthode du changement de variables.

a. Soit $U =]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$ et $\phi : U \to U$ définie par

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (u, v + \ln(u)).$$

Montrer en déterminant ϕ^{-1} que l'application est bijective sur U. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^1$.

b. On pose $F(u, v) = f \circ \phi(u, v)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$.

c. Résoudre $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. En déduire que les fonctions du type $f(x, y) = g(y - \ln(x))$, où g est une fonction dérviable d'une variable réelle, sont solutions de (E).

3. Montrer que le type de solutions obtenues en **1** est un cas particulier des solutions obtenues en **2.c**.

Formulaire

Propriétés de la transformée de Laplace

1. (linéarité) $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g)$.

2. (multiplication par exponentielle) $\mathcal{L}(f(t)e^{-at}) = \mathcal{L}(f)(p + a)$.

3. (transformée des dérivées) $\mathcal{L}(y^{(n)}) = p^n\mathcal{L}(y) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$.

Transformées usuelles

(Les fonctions sont supposées causales)

1. $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$

2. $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

3. $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$

4. $\mathcal{L}(cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

5. $\mathcal{L}(sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$