FINAL MT20

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 Laplace (5 points)

Dans cet exercice on applique Laplace pour résoudre des équations différentielles linéaires homogène du troisième ordre :

1. Un exemple

a. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (on cherchera des racines évidentes).

b. Résoudre par la méthode de Laplace l'équation différentielle suivante

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales suivantes $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$

2. On considère l'équation différentielle suivante

$$y''' + my' + ny = 0 \ (E)$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$

a. En notant $Y = \mathcal{L}(y)$ la transformée de Laplace de la solution de cette équation, montrer que $Y = \dfrac{1}{p^3 + mp + n}$

b. Considérons l'équation algébrique $x^3 + mx + n = 0$ et posons $\Delta = \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{m^3}{27}$ (Δ est appelé le discriminant de l'équation $x^3 + mx + n = 0$). En 1545, Jérôme Cardan a proposé une méthode pour résoudre les équations algébriques du type $x^3+mx+n = 0$. Ainsi si $\Delta < 0$ on sait que l'équation $x^3 + mx + n = 0$ a trois racines réelles distinctes r_1, r_2, r_3. Que peut-on en déduire pour l'étude de l'équation différentielle (E) ?

Exercice 2 Fonctions de deux variables (3 points)

1. Les fonctions suivantes sont-elles continues en $(0, 0)$?

a.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Rechercher les extremas locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 6y$

Exercice 3 Équations aux dérivées partielles homogènes d'ordre 2 (12 points)

Le but de l'exercice est de proposer une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Partie A : changement de variables

1. Montrer que l'application $\phi : (u, v) \mapsto (u, v - \alpha u)$ définit bien un changement de variable, vous montrerez que ϕ est bijective en déterminant ϕ^{-1} (vous noterez $x = u$ et $y = v - \alpha x$).

2. Justifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour la suite du problème on définit $\phi_1 : (u, v) \mapsto (u, v - \alpha_1 u)$ et $\phi_2 : (u, v) \mapsto (u, v - \alpha_2 u)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$. D'après ce qui précède ϕ_1 et ϕ_2 sont des changement de variables de classe $\mathcal{C}^2$.

Partie B : résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1

1. On considère l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \alpha_1 \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$.

a. On note G la fonction composée $G = g \circ \phi_1$ définie par $G(u, v) = g(u, v - \alpha_1 u)$. Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u, v)$.

b. En déduire que g est solution de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \alpha_1 \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u, v) = 0$.

c. Conclure que les solutions de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \alpha_1 \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ sont les fonctions g telles que $g(x, y) = h(y + \alpha_1 x)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

2. On considère l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(y + \alpha_1 x)$.

a. On définit maintenant $F(u, v) = f \circ \phi_2(u, v) = f(u, v - \alpha_2 u)$. Montrer en utilisant les mêmes techniques qu'aux questions **B 1** que f est solution de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(y + \alpha_1 x)$ si et seulement si F est solution de $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) = h(v + (\alpha_1 - \alpha_2)u)$.

b. On note H une primitive de h et on considère $\Psi(u, v) = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} H(v + (\alpha_1 - \alpha_2)u)$. Montrer que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} = h(v + (\alpha_1 - \alpha_2)u)$.

c. Conclure que f est solution de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} = h(y + \alpha_1 x)$ si et seulement si $F(u, v) = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} H(v + (\alpha_1 - \alpha_2)u) + K(v)$.

d. Déterminer alors f.

Partie C : cas des équations aux dérivées partielles homogènes d'ordre 2

1. On note α_1 et α_2 les racines du trinôme $r^2 + br + c$. Montrer que $b = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ et $c = \alpha_1 \alpha_2$.

2. Posons $g(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et montrer que f est solution de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ si et seulement si g est solution de $\dfrac{\partial g}{\partial x} - \alpha_1 \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

3. En utilisant la partie **B** déduire que $g(x, y) = h(y + \alpha_1 x)$ et montrer que f est solution de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} = h(y + \alpha_1 x)$.

4. Conclure en donnant les solutions de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$