le 2 Février 2011

UTBM MT20

Final automne 2010

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(6 points)*

I - Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1)\ (1+x)y' - y = 1+x.$$

Sur quel intervalle ces solutions sont-elles définies ?

II - Resoudre l'équation différentielle :

$$(E_2)\ y'' + 2y' + y = 2\cos(x).$$

Sur quel intervalle ces solutions sont-elles définies ?

Exercice 2 *(4 points)*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sqrt{x}.\ln(y - x^2).$$

1. *Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de f.*
2. *Calculer les 4 dérivées secondes de f.*

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 3 *(10 points)*

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \ \textit{si} \ (x,y) \in \Omega \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f *est différentiable sur* Ω *et calculer sa différentielle.*

3) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}$ *et* $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$.

4) Les dérivées partielles sont-elles continue ?

5) Justifier, **sans gros calcul**, *que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y).$$