Exercice 1

1. $\sum \dfrac{1}{k!\,2^k} = \sum \dfrac{x^k}{k!}$ avec $x = \dfrac{1}{2}$. On reconnaît la série exponentielle et on sait que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,2^k} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

2. Pour que la série à termes réels positifs $\sum u_n$ soit convergente, il suffit que

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ car la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Il suffit donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

3. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ apparaît comme une somme «téléscopique» dont on sait calculer facilement la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. La règle de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série $\sum \dfrac{n}{2^n}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout entier naturel n,

$\sinh(n) = \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{2}$ et $\dfrac{\sinh(n)}{a^n} \geqslant 0$.

Donc $\sinh(n) \underset{(n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$ et $\dfrac{\sinh(n)}{a^n} \underset{(n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2\,a^n} = \dfrac{(\mathrm{e}/a)^n}{2}$

Or les séries $\sum \dfrac{\sinh(n)}{a^n}$ et $\sum \left(\dfrac{\mathrm{e}}{a}\right)^n$ sont de même nature

et la série géométrique $\sum \left(\dfrac{\mathrm{e}}{a}\right)^n$ converge ssi $\left|\dfrac{\mathrm{e}}{a}\right| < 1$.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{\sinh(n)}{a^n}$ est convergente si, et seulement si, $\dfrac{\mathrm{e}}{a} < 1$ c'est-à-dire $a > \mathrm{e}$.

Exercice 2 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9\,xy + 1$

1. En tant que fonction polynômiale, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 9x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -9 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

2. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, elle admet un développement limité d'ordre 2 en tout point et en particulier au point $a = (0\,;\,-1)$. Alors il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)$, continue en $(0,0)$ et nulle en $(0,0)$ telle que, en posant $\overrightarrow{h} = (k\,,\ell)$, on ait :

$$\begin{aligned}
&f(0+k\,,\,-1+\ell) = f(a+\overrightarrow{h})\\
&= f(a) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)\cdot\overrightarrow{h} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,k^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\,k\ell + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,\ell^2\right] + \left\|\overrightarrow{h}\right\|^2 \varepsilon(\overrightarrow{h})\\
&= 0 + 9k + 3\ell + \frac{1}{2}\left[0 + 2\times(-9)k\ell - 6\ell^2\right] + (k^2+\ell^2)\varepsilon(k,\ell)\\
&= 9k + 3\ell - 9k\ell - 3\ell^2 + (k^2+\ell^2)\varepsilon(k,\ell).
\end{aligned}$$

3. Le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f sont solution(s) du système :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}3x^2 - 9y = 0\\ 3y^2 - 9x = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}y = x^2/3\\ 3\,\dfrac{x^4}{9} - 9x = 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c}y = x^2/3\\ x^4 - 27x = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}x(x^3-27) = 0\\ y = x^2/3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}x = 0 \text{ ou } x^3 = 27\\ y = x^2/3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x = 3\\ y = 3\end{array}\right.$$

La fonction $\boxed{f \text{ admet donc deux points critiques } b = (0,0) \text{ et } c = (3,3)}$.

4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, il suffit d'appliquer la condition suffisante d'extremum d'ordre 2. On utilise les notations de Monge.

- Au point $b = (0,0)$: $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b) = 0$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b) = -9$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(b) = 0$

  D'où $rt - s^2 = 0 - 81 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en b.

- Au point $c = (3,3)$: $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c) = 18$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c) = -9$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(b) = 18$
  D'où $rt - s^2 = 18 \times 18 - 81 > 0$ avec $r > 0$.
  Donc f présente un **minimum local** en c, minimum égal à
  $f(c) = f(3,3) = 3^3 + 3^3 - 3 \times 3^3 + 1 = -3^3 + 1 = -26$.

5. Ce minimum n'est pas global car $f(x,0) = x^3 + 1 \underset{(x \to -\infty)}{\longrightarrow} -\infty$

Exercice 3

1. $\forall x \in I,\ g(x) = x \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt$.

   (a) Notons f la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^t}{1+t}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Donc f est continue sur I et la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt$ est l'unique primitive de f sur I, primitive qui s'annule en $x = 0$.
   Autrement dit, F est dérivable sur I, $F' = f$ et $F(0) = 0$.
   Nous avons donc $\forall x \in I,\ g(x) = x \times F(x)$.
   Ainsi, en tant que produit de deux fonctions dérivables sur I, g est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ g'(x) = 1 \times F(x) + x \times F'(x) = F(x) + x\,f(x)$

   $$\boxed{g'(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt + \frac{x\,e^x}{1+x}}$$

   (b)
   - Si $x > 0$ alors $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt > 0$ car $\forall t \in I,\ f(t) > 0$ et $\dfrac{x\,e^x}{1+x} > 0$.
     Donc $g'(x) > 0$.
   - Si $x < 0$ alors $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt < 0$ car $\forall t \in I,\ f(t) > 0$ et $\dfrac{x\,e^x}{1+x} < 0$.
     Donc $g'(x) < 0$.
   - $g'(0) = 0$

   Ainsi g est strictement décroissante sur $]-1\,,0[$ et strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$.

2. (E_1) : $(1+x)\boldsymbol{y}' = x\,\boldsymbol{y}$
   On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle I, vérifiant $\varphi(0) = 1$.

   (a) $(E_1) \iff \boldsymbol{y}' = \dfrac{x}{1+x}\boldsymbol{y}$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre. La fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ étant continue sur l'intervalle I, on sait que le **problème de Cauchy** $\begin{cases} \boldsymbol{y}' &= \dfrac{x}{1+x}\boldsymbol{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ admet une unique solution φ définie sur I.

   (b) On sait que la solution générale de (E_1) sur I est la fonction

   $$x \longmapsto \lambda\, e^{\int \frac{x}{1+x}\,dx} = \lambda\, e^{\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx} = \lambda\, e^{x - \ln(1+x)} = \lambda \frac{e^x}{1+x}$$

   avec λ constante réelle.

   Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\quad \varphi(x) = \lambda \dfrac{e^x}{1+x}$. Or $\varphi(0) = 1$ Donc $\lambda = 1$ puis

   $$\forall x \in I, \quad \boxed{\varphi(x) = \frac{e^x}{1+x}}$$

3. (E_2) : $x^2(1+x)\,\boldsymbol{y}'' - x(x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y}' + (x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y} = 0$

   (a) Si y_1 est une fonction affine alors $y_1'' = 0$. Donc y_1 est solution de (E_2) ssi y_1 est solution de $-x(x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y}' + (x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y} = 0 \iff -x\,\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y} = 0$.

   On en déduit que la fonction affine $\boxed{y_1 : x \mapsto x}$ est une solution particulière de (E_2).

   (b) y_1 est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients variables (E_2) telle que y_1 **ne s'annule pas** sur $J =]0\,,+\infty[$. On résout (E_2) par la méthode de Lagrange. On peut obtenir une solution y_2 indépendante de y_1 en la recherchant sous la forme

   $$y_2(x) = \lambda(x)\,y_1(x)$$

   où $\lambda : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction une fonction inconnue deux fois dérivable sur J.

   $$\begin{aligned} y_2(x) &= x\,\lambda(x) \\ y_2'(x) &= \lambda(x) + x\,\lambda'(x) \\ y_2''(x) &= 2\lambda'(x) + x\,\lambda''(x) \end{aligned}$$

Alors y_2 est une solution de (E_2) sur J
ssi $\forall\, x>0,\quad x^2(1+x)\,y_2''(x)-x(x^2+2x+2)\,y_2'(x)+(x^2+2x+2)\,y_2(x)=0$
ssi $\forall\, x>0,\ x^2(1+x)(2\lambda'(x)+x\,\lambda''(x))-x(x^2+2x+2)(\lambda(x)+x\,\lambda'(x))+x(x^2+2x+2)\lambda(x)=0$
ssi $\forall\, x>0,\quad x^3(1+x)\,\lambda''(x)+x^2[2(1+x)-(x^2+2x+2)\,\lambda'(x)]=0$
ssi $\forall\, x>0,\quad (1+x)\,\lambda''(x)-x\,\lambda'(x)=0$
ssi la fonction λ' est une solution de l'équation différentielle (E_1) sur J.

(c) On peut choisir $\forall\, x>0,\ \lambda'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$ et $\forall\, x>0,\ \lambda(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\forall\, x>0,\ y_2(x)=x\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t=g(x)$.

Finalement la solution générale de (E_2) sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ est la fonction :

$$\boxed{x\longmapsto \lambda\,x+\mu\,g(x)}$$

où λ et μ désignent des constantes réelles.