Mathématiques - MT20

Tronc commun

Final - Automne 2012

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants ne doivent faire usage d'aucun matériel électronique.

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. On demande d'indiquer laquelle sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Vous pouvez décider de ne pas répondre à certaines questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. Combien vaut la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,2^k}$?

   (a) $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ (b) $\sqrt{\mathrm{e}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ (d) e^2

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir la convergence de cette série ?

   (a) $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ (b) $u_n^2 \leqslant \dfrac{1}{n}$ (c) $\sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (d) $\mathrm{e}^{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

3. Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

   (a) $\sum \dfrac{1}{n^3}$ (b) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ (c) $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ (d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

4. Pour laquelle des séries suivantes, la règle de D'Alembert permet-elle de justifier la convergence ?

   (a) $\sum \dfrac{1}{n\,\ln(n)^2}$ (b) $\sum \dfrac{n}{2^n}$ (c) $\sum \dfrac{\sin n}{n!}$ (d) $\sum \dfrac{1}{n^2}$

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. La série de terme général $\dfrac{\sinh(n)}{a^n}$ est convergente si, et seulement si, ...

   (a) $a \geqslant 1$ (b) $a > 1$ (c) $a > \mathrm{e}$ (d) $a > 0$

Exercice 2 (6 points)

Dans cet exercice, des réponses brèves sont attendues. On ne demande pas de rédaction détaillée.

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 9\,xy + 1 \end{array}$

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f.
2. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au point $a = (0\,;\,-1)$.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Démontrer que la fonction f présente un seul extremum local.
   On précisera sa nature (*maximum local ou minimum local*).
5. Cet extremum est-il global ? Pourquoi ?

Exercice 3 (9 points)

1. On définit la fonction g sur l'intervalle ouvert $I =]-1\,,+\infty[$ par $g(x) = x \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.
   (b) Étudier les variations de g sur I.
2. On considère l'équation différentielle (E_1) : $(1+x)\boldsymbol{y}' = x\,\boldsymbol{y}$ dans laquelle $\boldsymbol{y}$ désigne la fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle I.

   On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle I, vérifiant $\varphi(0) = 1$.
   (a) Justifier sans calcul, l'existence et l'unicité de φ.
   (b) Calculer explicitement $\varphi(x)$ en remarquant que $\forall\, x \in I,\ \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$
3. On considère à présent l'équation différentielle (E_2) :
$$x^2(1+x)\,\boldsymbol{y}'' - x(x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y}' + (x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y} = 0$$
   (a) Trouver une fonction affine non nulle solution de cette équation (E_2).
   (b) Montrer que la résolution de (E_2) sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ se ramène à la résolution de l'équation différentielle (E_1).
   (c) En déduire, à l'aide de la fonction g vue à la question 1., une expression de la solution générale de (E_2) sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.