

Final automne 2015

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 10 points

Etudier la convergence des séries suivantes :

$$1. S_1 = \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

$$2. S_2 = \sum \frac{(n!)^2}{2^{n^2}},$$

$$3. S_3 = \sum \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \sqrt{n^5+n}},$$

$$4. S_4 = \sum \frac{\ln(n)}{n^2},$$

$$5. S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}. \text{ Cette série est-elle absolument convergente ?}$$

Exercice 2 (9 points)

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1 - f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ? Justifier soigneusement.

2 - Quelles sont ses dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 ? Justifier soigneusement.

3 - Les dérivées partielles sont-elles continues sur \mathbb{R}^2 ? Justifier soigneusement.

Exercice 3 (3 points)

Déterminer l'ensemble de définition et les extremums de la fonction $g(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$.
Justifier soigneusement.

RAPPEL :

$$\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

$$\arctan(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1, 1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$

$$e = \exp(1) \simeq 2.718.$$