

Final automne 2016

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 8 points

Les séries suivantes sont-elles convergentes ? Bien justifier.

- 1) $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$.
- 2) $\sum v_n$ avec $v_n = n^2 \cdot (\sin(\frac{1}{n}))^n$.
- 3) $\sum w_n$ avec $w_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n^2}$.
- 4) $\sum x_n$ avec $x_n = (-1)^n \sin(\frac{\sqrt{n+1}}{n})$.

Exercice 2 - 8 points

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1) f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
- 2) Quelles sont ses dérivées partielles ?
- 3) Les dérivées partielles sont-elles continues sur \mathbb{R}^2 ?
- 4) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ et $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.
- 5) Que peut-on dire de $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$?

Exercice 3 - 4 points

soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - 1) \cdot y \cdot (y - x)$.

- 1) Déterminer les extrema **locaux** de f sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y, y > 0, x < 1\}$.
- 2) Déterminer les extrema **globaux** de f sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y, y \geq 0, x \leq 1\}$.