

Final automne 2017

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 8 points

Les séries suivantes sont-elles convergentes ? Bien justifier.

- 1) $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{n^n}{n!}$.
- 2) $\sum v_n$ avec $v_n = n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n^2})$.
- 3) $\sum w_n$ avec $w_n = n \cdot (\ln(1 + \frac{1}{n^2}))^n$.
- 4) $\sum x_n$ avec $x_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

Exercice 2 - 6 points

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1 - f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
- 2 - Quelles sont ses dérivées partielles ? Sont-elles continues ?
- 3 - Montrer que

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}.$$

Exercice 3 - 4 points

Soit f la fonction de deux variable réelles définie par $f(x, y) = \frac{x}{(x \cdot y - 1) \cdot y}$.

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de f .
2. f admet-elle une limite en $(0, 0)$?

Exercice 4 - 2 points

Soit f la fonction de deux variable réelles définie par $f(x, y) = y^2 + x^2 - y - x$. Déterminer les extremums éventuels de f .