le 5 Janvier 2020

UTBM MT20

Final automne 2019

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *6 points*

Etudier la convergence des séries suivantes :

1. $S_1 = \sum \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$
2. $S_2 = \sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
3. $S_3 = \sum \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$ *Cette série est-elle absolument convergente ?*

Exercice 2 - *6 points*

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^5}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1 - f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2 - Quelles sont ses dérivées partielles ?
3 - Les dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 3 - *4 points*

1. *Montrer que la série suivante est convergente :*

$$\sum \frac{1}{n^n}.$$

2. *Déterminer* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* S_{n_0} *soit une approximation a* 10^{-3} *près de la limite* S *de la série précédente.*

Exercice 4 - *4 points*

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = \frac{nx + e^{-n.x^2}}{n+1}.$$

1. *Déterminer la limite simple de la suite* $(f_n)_n$*.*
2. *La convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *? Et sur* $[0,1]$ *?*