le 14 Décembre 2020

UTBM MT20

Travail à rendre pour le 11 janvier 2021

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
2. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$
3. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$
où on a posé $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
4. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.

1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x,y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$;
2. $f(x,y) = x-y+x^3+y^3$ et $K = [0,1]\times[0,1]$;