le 11 Janvier 2022

UTBM MT20

Automne 2021

Travail à rendre sur Moodle le jeudi 6 janvier 2022 à 18h au plus tard

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1

Attention au signe de la fonction à intégrer !

1. $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x.\sqrt{x}}\mathrm{dx}$ *est-elle convergente ?*
2. $I_2 = \int_0^{2} \frac{\sin(x)}{x.\sqrt{x}}.\mathrm{dx}$ *est-elle convergente ?*
3. *Grâce au changement de variables* $u = x^2$, *montrer que* $I_3 = \int_1^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{dx}$ *est convergente.*

Exercice 2

Les séries suivantes sont-elles convergentes ? Bien justifier.

1) $\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$.

2) $\sum v_n$ *avec* $v_n = n^2.(\sin(\frac{1}{n}))^n$.

3) $\sum w_n$ *avec* $w_n = \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n^2}$.

4) $\sum x_n$ *avec* $x_n = (-1)^n \sin(\frac{\sqrt{n+1}}{n})$.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer les intervalles sur lesquels ces solutions sont définies :

1)

$$(E_1)\ y'.(1+x^2) = 4.x.\sqrt{y}.$$

2)

$$(E_2)\ xy' - 2y = -\frac{3}{x}$$

3)

$$(E_3)\ y'' + y' + 2y = \cos(3x).$$

Exercice 4

Soit l'équation différentielle

$$(E)\ y'' + x.y' - 2.y = 0.$$

1. *Déterminer une solution y_0 de l'équation (E) qui soit un polynôme du second degré.*
2. *En posant $y = y_0.z$, déterminer toutes les solutions de E.*

Exercice 5

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.