UTBM 12 Novembre 2007
MT20 durée 2 heures

Médian

La qualité et la précision de la rédaction sera prise en compte pour l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Pour s'échauffer un peu de calcul,

1. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+6}dx$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+6}dx$ converge-t-elle ?
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y' + y = \sin(x)$ avec $y(0) = 1$
   (b) $y'' - 2y' - 2y = 4x^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

[5 points]

Exercice 2 Le but de cet exercice est de vous faire manipuler des sommes infinis de nombre positifs ($\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$). On utilisera pour se faire la théorie de l'intégration et en particulier les intégrales impropres :

1. Dans cette première partie nous étudions la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{N^2} + \dots$:
   (a) Calculer l'inégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n^2} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}dx$ (on pourra argumenter avec un dessin sommaire sur lequel on tracera la représentation graphique de $x \to \frac{1}{x^2}$).
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^N \frac{1}{x^2}dx$.
   (d) On note $\displaystyle S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$
      i. Calculer $S_{N+1} - S_N$, en déduire que la suite (S_N) est croissante.
      ii. Montrer que pour tout N, $S_N \leqslant 2$ (on pourra utiliser les questions (a) et (c)).
      iii. On rappelle qu'une suite croissante et majorée converge, montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ existe.
2. Dans cette première partie nous étudions la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \dots$:
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx < \frac{1}{n}$.

(b) En déduire $\int_1^N \frac{1}{x^2}dx < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

(c) Prouver que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$

On dira qu'une somme infinie (on parle de série) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ congerge si $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n$ tend vers un réel l. On dira que cette somme infinie diverge si $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = +\infty$. Vous avez donc montrer en 1. que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et qu'au contraire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (d'après 2.).

3. D'après le travail fait en 1. et 2. et en utilisant les résultats du cours sur les intégrales impropres à quelle condition sur α pensez-vous que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ou diverge vers l'infini ?

[8 points]

Exercice 3 Le but de ce problème est de donner une méthode pour résoudre les équations diffŕentielles de Bernouilli, c'est à dire les équations différentielles du type

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^m(x).$$

On commence par un cas particulier avant de traiter le cas thérorique :

1. Un cas particulier l'équation $y' + \frac{2}{x}y = xy^2 \quad (E_1)$.
   (a) En faisant le changement de fonction inconnue $u = \frac{1}{y}$, montrer que (E_1) est équivalente à l'équation $-u' + u = 1 \quad (E_1')$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $-u' + \frac{1}{x}u = x$.
   (c) En déduire y.
2. Cas général l'équation $y' + a(x)y = b(x)y^m \quad (E)$.
   (a) En faisant le changement de fonction inconnue $u = \frac{1}{y^{m-1}}$, montrer que (E) est équivalente à l'équation $-\frac{1}{m-1}u' + a(x)u = b(x) \quad (E')$.
   (b) Résoudre l'équation homogène $-\frac{1}{m-1}u' + a(x)u = 0$ en fonction de $\int a(x)dx$.
   (c) Quelle méthode peut-on utiliser pour trouver la solution particulière ? Donner la solution particulière en fonction des primitive de $b(x), a(x)$ etc ...
   (d) Conclure.

[9 points]

Correction Médian Novembre 2006, MT20